

Ingrid Ferreira da Costa

Variação da Constante de Estrutura Fina Devido a um Escalar Cosmológico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Valerio Marra

**Vitória
2018**

Dedico este trabalho à minha família

*O essencial é saber ver,
mas isso, triste de nós que
trazemos a alma vestida,
isso exige um estudo profundo,
aprendizagem de desaprender.
Eu procuro despir-me do que aprendi,
eu procuro esquecer-me do modo
de lembrar que me ensinaram
e raspar a tinta com que
me pintaram os sentidos,
desembrulhar-me e ser eu.*

Alberto Caeiro

Agradecimentos

Agradecimentos são sempre perigosos para quem escreve e cansativos para quem os lê, mas se fazem necessários após o término de um trabalho. Sendo assim, se faz indispensável agradecer aos meus pais, pois sempre me deram todo amor e a oportunidade de estudar a vida inteira, dando todo apoio preciso, tanto emocional quanto financeiro, quando necessário mesmo agora à distância. Agradeço também aos meus irmãos, cunhada e sobrinhos por todo carinho e apoio dispensado a mim durante todo esse tempo.

Agradeço imensamente também ao meu noivo Isaac, que em todo momento esteve comigo e foi essencial em todos os momentos. Muito obrigada por todo amor e atenção dedicados à mim.

Agradeço também ao meu orientador Valerio Marra, por ter me aceitado como aluna e ter me ajudado bastante durante esse tempo de mestrado.

Queria agradecer também aos amigos do PPGFIS: Raquel, Syrius, Daniel, Jenifer, Yago, Eddy, Álefe, Olesya, entre outros, pelas conversas e companheirismo dentro da sala dos alunos e fora dela. Um agradecimento mais especial para Felipe, Sara e David que estão comigo desde o início e nunca mediram esforços para me ajudar no que fosse preciso.

Queria dizer muito obrigada também aos professores do PPGFIS e da UFPA por terem sido mestres para mim, foi de grande valia.

E à todos os demais que não foram citados, mas que foram de grande importância, queria agradecer igualmente. Todos tem lugar no meu coração e tem minha gratidão.

Agradeço à Fapes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a evolução e a consequente variação da constante de estrutura fina α devido a um escalar cosmológico, que no nosso caso se acopla ao campo eletromagnético. Para tanto, usamos um modelo cosmológico de quintessência para demonstrar a evolução cósmica de α através de um sistema dinâmico. Em seguida, comparamos a evolução encontrada com os limites observacionais atuais sobre a variação de α . Concluimos que é valioso considerar interações entre a energia escura e outros campos, pois podemos utilizar mais dados observacionais (limites sobre a variação de α) para vincular a natureza da energia escura. **Palavras-chave:** Cosmologia, Quintessência, Constante de estrutura fina, Variação de constantes.

Abstract

In this work, we present the evolution and the consequent variation of the fine structure constant α due to a cosmological scalar, which in our case is coupled to the electromagnetic field. To do so, we use a quintessence cosmological model to demonstrate the cosmic evolution of α through a dynamical system. Then we compare its evolution with the observational limits on the variation of α . We conclude that it is useful to consider interactions between dark energy and other fields because we can use more observational data (limits on the variation of α) in order to constrain the nature of dark energy.

Keywords: Cosmology, Quintessence, fine-structure constant, variation of constants.

Sumário

1	Introdução	1
2	Cosmologia e Relatividade Geral	3
2.1	Introdução	3
2.2	Princípio Cosmológico	4
2.3	Expansão cosmológica	6
2.4	O Problema da Coincidência	6
2.5	O Problema da Constante Cosmológica	7
2.6	Quintessência	8
2.6.1	Problemas da Quintessência	9
3	Campo Escalar	11
3.1	Sistema Dinâmico	13
3.1.1	Potencial Exponencial	21
3.1.2	Pontos Críticos	22
3.2	Solução Numérica	39
3.2.1	Solução Numérica sem Radiação	39
3.2.2	Solução Numérica com Radiação	41
4	Constantes Fundamentais	44
4.1	Introdução	44
4.2	Constantes Fundamentais	45
4.2.1	Constantes na Cosmologia	50

4.3	A Constante de Estrutura Fina Alfa	52
4.3.1	Limites Atuais Sobre Alfa	54
5	Acoplamento de ϕ Com o Campo Eletromagnético	57
5.1	Introdução	57
5.2	Representação de alfa	58
5.2.1	Tipos de Acoplamento	58
6	Conclusão	64
	Referências Bibliográficas	66

Capítulo 1

Introdução

Apesar dos grandes avanços que tivemos na cosmologia nos últimos 100 anos, ainda temos algumas problemas em aberto. A questão do setor escuro do Universo, por exemplo, é um problema que parece não estar perto de uma solução definitiva. A motivação para este trabalho é justamente tentar esclarecer qual seria a verdadeira natureza de uma das componentes do setor escuro: a energia escura.

A energia escura seria responsável pela aceleração tardia do Universo. Sem uma componente desse tipo, não teríamos como explicar tal aceleração de forma que concordasse com os dados observacionais que temos hoje, que indicam um Universo em expansão acelerada.

Neste trabalho, apresentamos a evolução cosmológica da constante de estrutura fina, α , até os dias atuais. Também apresentamos que essa constante pode apresentar uma variação temporal devido a um escalar cosmológico, que no nosso caso, se acoplará ao campo eletromagnético. Para que possamos estudar essa variação de forma satisfatória, usamos um modelo cosmológico de quintessência. Esse modelo serve para demonstrar a evolução cósmica de α através de um sistema dinâmico, que trabalharemos de duas formas: um sistema terá apenas duas variáveis (x_1 e x_2) e não terá a presença da radiação e de interação; e outro que terá três variáveis (x_1, x_2 e x_3) e contará com a radiação e interação.

Após essa análise do sistema dinâmico, comparamos a evolução cosmológica encontrada com os limites observacionais de hoje sobre a variação da constante de estrutura fina com diversos valores diferentes para alguns parâmetros importantes para essa evolução.

Isto posto, dividimos o nosso trabalho em, primeiramente, dar um pequeno resumo sobre cosmologia e relatividade geral, focando nos principais pontos destes, como o Princípio Cosmológico, os problemas que cercam a cosmologia e caracterização do modelo cosmológico que será usado em nos-

soos estudos, a quintessência. Depois, fazemos o sistema dinâmico como foi descrito acima e fazemos a análise das soluções numéricas encontradas com as condições iniciais dadas. Em seguida, falamos sobre as constantes fundamentais, o que são, quais são consideradas dessa forma, entre outras coisas. Falamos também sobre essas constantes na cosmologia e, logo após, discorremos sobre, especificamente, a constante de estrutura fina, α , e os limites atuais sobre ela. Por fim, fazemos o acoplamento com o campo eletromagnético e analisamos a evolução de α de acordo com os limites que foram apresentados anteriormente. Fazemos essa análise com vários tipos de acoplamentos e verificamos quais que se encaixam melhor nesses limites. Logo depois temos as conclusões.

Capítulo 2

Cosmologia e Relatividade Geral

2.1 Introdução

O céu sempre exerceu grande fascínio no homem. Pode-se dizer que a astronomia é tão antiga quanto a humanidade, e que seus estudos foram de extrema importância para o desenvolvimento desta. O tempo passou e as pesquisas avançaram bastante, tanto que descobrimos que o Sol não gira em torno do nosso planeta, nem que somos o único sistema no Universo e que há muito mais lá fora do que pensávamos inicialmente. Dessa forma, surge a Cosmologia, como uma área da Física que tem como objeto de estudo o Universo como um sistema único e sua evolução ao longo do tempo.

Como a Cosmologia é um campo de estudo que depende muito de observações, o avanço da tecnologia é de extrema importância para o seu desenvolvimento. Portanto, ainda há muito tempo até obtermos respostas definitivas sobre diversas questões que ainda estão em aberto.

A Cosmologia tem como objetivo estudar o nosso Universo como um sistema único, utilizando todo o aparato que a Física, Astronomia e Astrofísica fornecem e, dessa forma, descrever o conjunto de fenômenos na maior escala, em que não temos um parâmetro para comparação (outros universos) e nem podemos fazer experimentos com nosso objeto de estudo, apenas observá-lo de forma parcial, ou seja, *Cosmologia é o estudo do mais remoto grupo de objetos nos quais as nossas leis físicas tenham significado e possam ser aplicadas de maneira consistente e bem sucedida.* [1].

As primeiras décadas do século XX foram de muitas descobertas, entre elas a de que não conhecemos a constituição de toda a matéria presente no Universo. O astrônomo suíço Zwicky, utilizando o Teorema do Virial, fez tal descoberta analisando as curvas de rotação das galáxias do aglomerado

de COMA, concluindo que as curvas obtidas experimentalmente não eram as mesmas obtidas teoricamente através da teoria newtoniana, as galáxias tinham uma velocidade muito maior que a esperada, o que implicaria em uma massa muito maior que a visível [2]. Chamou esse acréscimo de massa de *dunkle materie* ou, traduzindo, *matéria escura*. Mais tarde, outros astrônomos chegaram a esta mesma conclusão e mais: havia matéria escura não só em aglomerados de galáxias, mas também dentro das galáxias, inclusive na nossa [3].

Há indícios de que a matéria escura tenha participado ativamente da dinâmica universal e da formação das estruturas cósmicas presentes hoje em dia. A teoria inflacionária do Big Bang [4], [5] precisa dessa componente desconhecida para explicar de maneira satisfatória a formação que temos atualmente no Universo. Sabemos também que a maior parte dessa massa não é constituída por bárions, mas sim por partículas exóticas, não detectadas até agora. Existem muitos candidatos à essas partículas, porém ainda existem muitas dúvidas e pesquisas a serem feitas.

Existe ainda uma outra componente desconhecida, que junto com a matéria escura, formam o setor escuro do Universo: a energia escura. Juntas elas representam cerca de 90% de todo o conteúdo que preenche o cosmos. Essa outra componente escura explicaria a expansão acelerada do Universo.

O setor escuro do Universo vem sendo bastante investigado, com inúmeras pesquisas na área. Satélites já foram lançados e alguns detectores construídos afim de provar a existência das partículas exóticas que formariam a matéria escura.

Como a Cosmologia é um campo de estudo que depende muito de observações, o avanço da tecnologia é de extrema importância para o seu desenvolvimento. Portanto, ainda há muito tempo até obtermos respostas definitivas a respeito da verdadeira natureza dessas componentes escuras. A figura 2.1 mostra a evolução do Universo ao longo de aproximadamente 14 bilhões de anos.

2.2 Princípio Cosmológico

Para que qualquer teoria cosmológica seja coerente, ela deve obedecer um princípio que é bastante consistente com as observações feitas até o momento: o *Princípio Cosmológico* [6], [7], proposto como conhecemos hoje por Edward Arthur Milne no início dos anos 1930, sendo uma extensão da teoria de Albert Einstein, a qual diz que as leis da natureza devem ser as mesmas para todos os observadores. Tal princípio exige que o Universo seja homogêneo e isotrópico em grandes escalas ($> 100\text{Mpc}$),

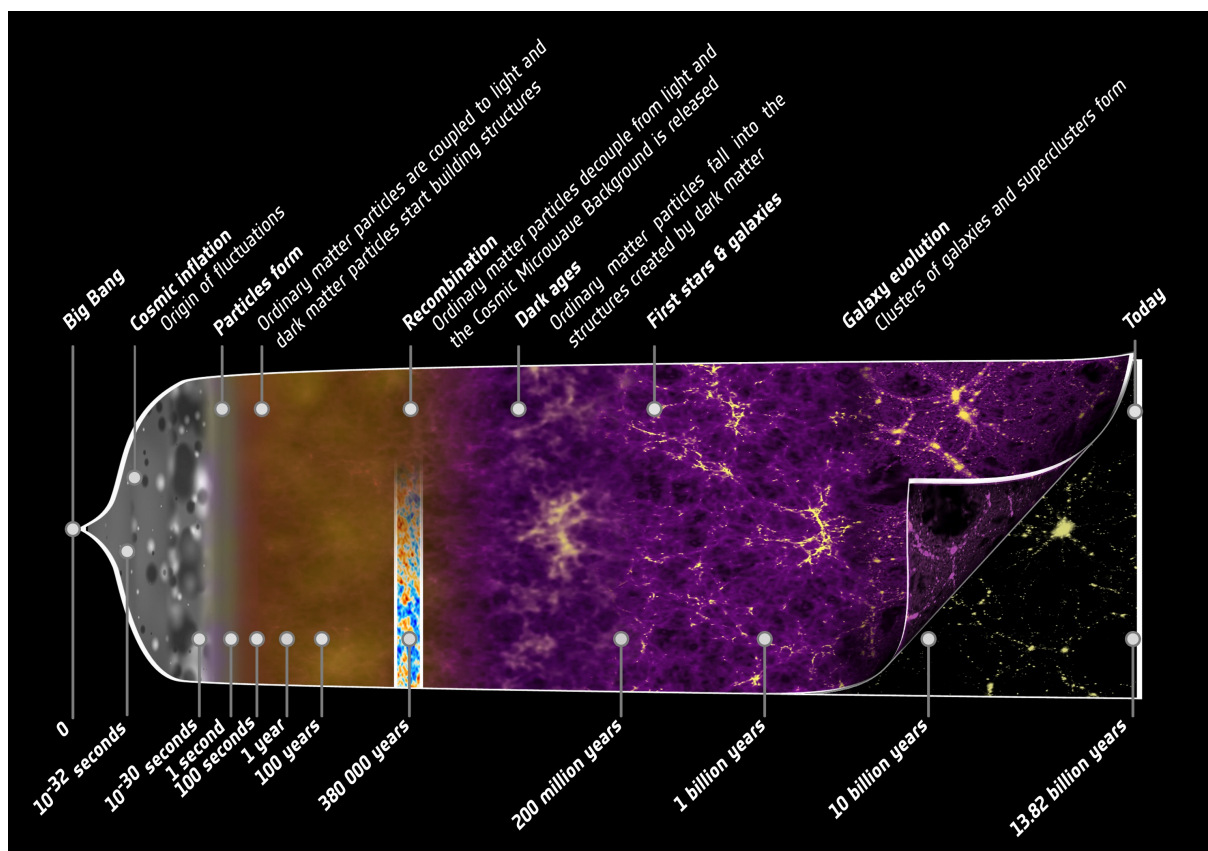


Figura 2.1: Essa imagem resume os quase 14 bilhões de anos de história do Universo, mostrando os principais eventos que ocorreram entre a fase inicial do cosmos, em que suas propriedades eram quase uniformes e pontuadas por pequenas flutuações, até a farta variedade de estruturas cósmicas que observamos atualmente, de estrelas e planetas a galáxias e aglomerados de galáxias.

ou seja, não há pontos privilegiados. Homogêneo, pois é o mesmo em qualquer lugar e isotrópico, pois é o mesmo em qualquer direção. A radiação cósmica de fundo (RCF ou em inglês *Cosmic Microwave Background - CMB*) é a principal evidência da isotropia do Universo. Isso juntamente com o *Princípio Copernicano* (não somos observadores especiais) nos leva a concluir sobre a homogeneidade do Universo.

A CMB [8] foi prevista por George Antonovich Gamow, Ralph Asher Alpher e Robert Herman em 1948 quando estudavam a formação do hélio [9], mas acabaram não dando muita importância na época. Ela só foi descoberta em 1964 por dois rádio-astrônomos americanos, Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson, quando estes decidiram usar uma antena de rádio extremamente sensível, construída inicialmente para telecomunicações, para fazer rádio observações da Via Láctea. Assim, detectaram um sinal de fundo, que era igualmente intenso em todas as direções. Estimava-se que a temperatura

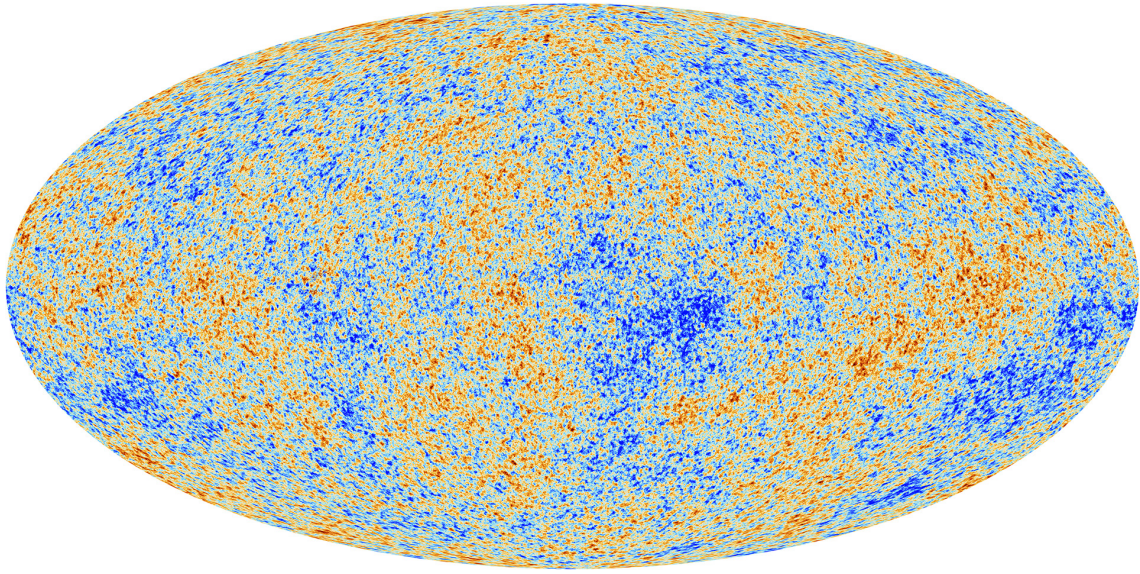


Figura 2.2: Anisotropias da CMB observadas pelo observatório espacial da Agência Espacial Europeia (ESA) Planck.

de fundo dessa radiação seria cerca de $5K$. Atualmente ela tem sido medida com grande precisão, a $2,726K$ [10]. Podemos ver a CMB em 2.2 e suas flutuações em 2.3.

2.3 Expansão cosmológica

Acreditava-se que o Universo era estático, mesmo após o surgimento da Relatividade Geral [11]. Entretanto, em 1929, essa hipótese foi completamente descartada depois das observações feitas por Edwin Powell Hubble no Monte Wilson, Califórnia, em um telescópio de $2,5m$, em que mostraram que as galáxias estavam se afastando [12]. Logo, o Universo não estava parado, ele estava se expandindo. Hubble mostrou também que a velocidade de afastamento dessas galáxias é proporcional à distância, ou seja, $v = H_0 r$, em que H_0 é a constante de Hubble e r é a distância entre as galáxias. O diagrama feita originalmente por Hubble por ser visto em 2.4.

2.4 O Problema da Coincidência

Observações nos mostram que os valores atuais das densidades de energia escura e matéria escura são da mesma ordem de grandeza. Isso parece nos indicar que vivemos em um período particular e muito especial da história cósmica. Dentro do modelo padrão, esse tipo de acontecimento requer condições

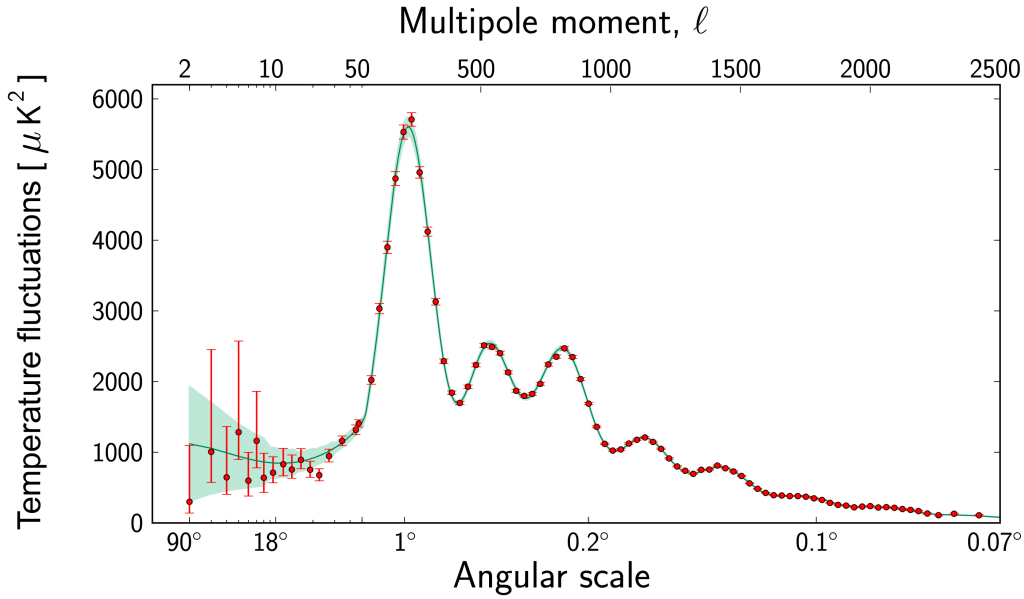


Figura 2.3: Esse gráfico mostra as flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (CMB) detectadas pelo Planck em diferentes escalas angulares do céu, começando em 90° do lado esquerdo até a menor escala do lado direito do gráfico. Os momentos multipolares correspondentes às várias escalas angulares estão indicados no topo do gráfico.

iniciais muito específicas no Universo primordial. O fato de não sabermos o motivo para que haja essa coincidência em tempos recentes, $z \approx 0,55$, constitui o que chamamos de *O Problema da Coincidência Cosmológica*, uma vez que no Universo primordial e em um futuro distante, elas diferem por muitas ordens de grandeza [13].

2.5 O Problema da Constante Cosmológica

Dentro do Modelo Padrão da Cosmologia, um dos maiores problemas é explicar o valor tão pequeno da constante cosmológica. Sua densidade de energia é:

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c = 0,76 \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 4 \text{ GeV} m^{-3}. \quad (2.1)$$

Uma das formas de interpretar essa densidade de energia é identificá-la como sendo a densidade de energia do espaço vazio, ou seja, do vácuo. Entretanto, isso não é possível, uma vez que a teoria quântica de campos prevê uma energia de vácuo que é 120 ordens de grandeza maior do que observado

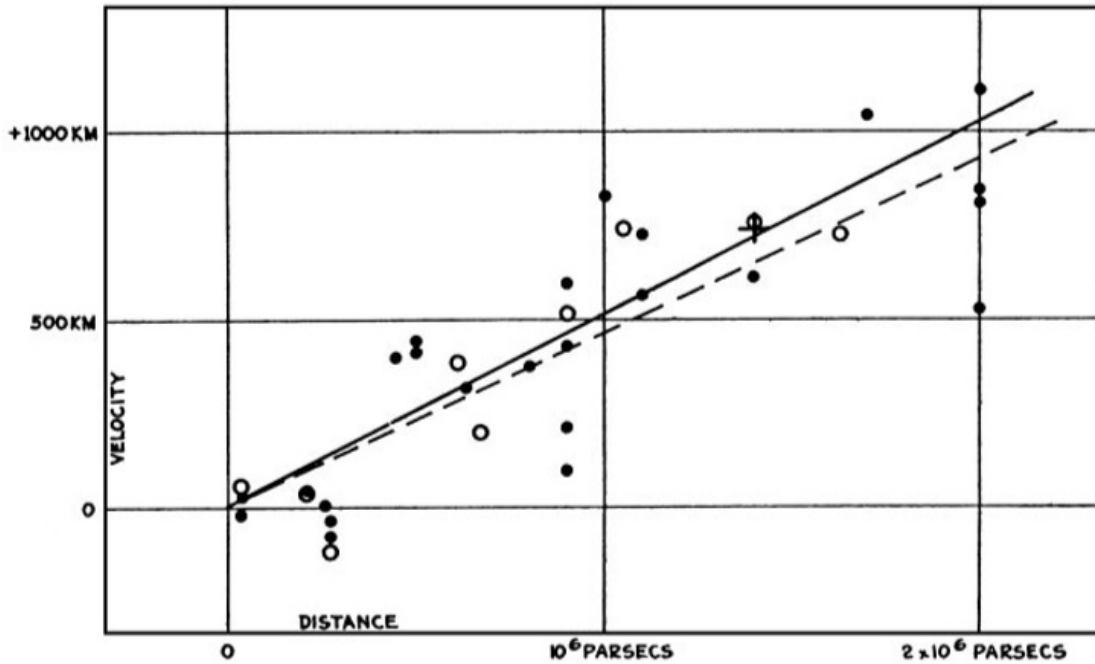


Figura 2.4: Diagrama de Hubble em sua forma original, em que mostra a relação velocidade-distância entre nebulosas extra-galácticas. Os discos pretos e a linha contínua representam a solução para o movimento solar usando as nebulosas de forma individual; os círculos e a linha tracejada representam a solução que combina as nebulosas em grupos; a cruz representa a velocidade média correspondente à distância média de 22 nebulosas, cujas distâncias não puderam ser medidas separadamente.

[14].

2.6 Quintessência

Uma tentativa de se resolver as dificuldades discutidas acima é a chamada *Quintessência*, introduzida no final da década de 1980 [15]. Esse nome sugere que existe um quinto "elemento" junto com bárions, radiação, matéria escura quente e matéria escura fria [16].

Nesse modelo, ao invés de uma constante cosmológica e de um parâmetro da equação de estado que são temporalmente dependentes, introduzimos um campo escalar real, não-homogêneo com evolução lenta rolando para baixo em um potencial, análogo ao campo *inflaton* na teoria da inflação [17].

Existem muitas razões para preferirmos a quintessência (energia escura dinâmica) à simples constante cosmológica (que representa uma densidade de energia estática). A princípio, podemos supor que a energia de vácuo é zero por algum mecanismo, dessa forma, a função de explicar a energia escura vai para a quintessência. Outro bom motivo é a escolha de ϕ para um potencial do tipo "runaway" (fugitivo),

ou seja, o que tende a zero no infinito. Assim sendo, a densidade do campo evolui lentamente para zero, de forma que o universo tende espontaneamente em direção a um estado de energia de vácuo nulo. Então, a energia escura seria explicada dinamicamente sem a necessidade de um ajuste fino.

Em um primeiro momento, parece que apenas substituímos o problema da coincidência por outro, pois para que tenhamos um campo de quintessência como o que é observado hoje, precisamos de condições iniciais muito bem ajustadas. Felizmente, existem as chamadas *soluções de rastreamento* (do inglês *tracking solutions*)[18]. Dessa forma, o campo de quintessência será mais ou menos dependente das condições iniciais, podendo variar em até 100 ordens de magnitude. Assim, oferece a oportunidade de explicar o problema da coincidência de forma dinâmica.

2.6.1 Problemas da Quintessência

Apesar de ser uma excelente alternativa, a quintessência também apresenta problemas. Um deles tem a ver com a massa, que é definida como:

$$m_{\phi_0}^2 \equiv \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{t=t_0}. \quad (2.2)$$

Queremos que a energia escura seja descrita de forma dinâmica pela quintessência, por conseguinte a relação abaixo deve ser válida

$$\sqrt{V''(\phi)_0} \sim H_0. \quad (2.3)$$

Para que isso seja realmente verdade, é necessário que o campo escalar esteja rolando vagarosamente ao longo do potencial. Se tivermos [19]

$$\sqrt{V''(\phi)_0} > H_0,$$

então ϕ rola livremente e a condição não será satisfeita. Acontece o mesmo se

$$\sqrt{V''(\phi)_0} < H_0,$$

porém, dessa forma, ϕ permanece congelado e seria como se tivéssemos uma constante cosmológica. É importante frisar que se ϕ não terminar no possível atrator do potencial, a evolução levará o campo

escalar para o caso de rolamento lento ($\omega \simeq -1$) e não teremos 2.3.

Agora, podemos comparar 2.2 com 2.3, para que tenhamos, independentemente do potencial escolhido, a massa efetiva do campo escalar hoje

$$m_{\phi_0} \sim H_0 \sim 10^{-33} eV. \quad (2.4)$$

Para a teoria de partículas, não é tão natural que a massa seja tão pequena, pois as correções que são feitas em virtude da interação direta ou indireta de ϕ com as outras partículas levam a massa a ter valores muito mais elevados [20]. Com a supersimetria essa situação também não é satisfeita, já que é esperado que a escala de TeV seja ultrapassada. A partir disso, concluímos que para que se tenha uma massa tão pequena, é necessária alguma simetria global quebrada muito fracamente [21]. Apesar disso, mesmo neste caso, a massa pode ser aumentada através dos efeitos gravitacionais [20].

Um valor tão pequeno de m_ϕ leva a outros problemas também. Um deles é o do princípio da indeterminação que estabelece qualitativamente o alcance de uma certa interação a partir da massa de acordo com a relação

$$r \propto m^{-1},$$

dessa forma, qualquer interação de ϕ com outras partículas seria de longo alcance e a quintessência daria origem a interações de "quinta força", com a consequente violação do Princípio da Equivalência Fraca ¹ na universalidade da queda livre. Isso pode levar a vários problemas, uma vez que essas interações de "quinta força" estão submetidas a fortes restrições experimentais, mas também pode abrir novas perspectivas de investigação, tanto teórica como experimental.

¹Que será melhor explorado no capítulo 3.

Capítulo 3

Campo Escalar

Pelo fato de terem um valor esperado de vácuo, os campos escalares são muito populares na cosmologia por serem os mais simples e respeitarem a homogeneidade e isotropia do Universo (Princípio Cosmológico). Assim, esses campos tem papel crucial em diversos paradigmas na cosmologia moderna, como, por exemplo: [22]

- A energia escura dinâmica, uma alternativa à constante cosmológica einsteiniana para a aceleração atual do universo (quintessência);
- A variação espaço-temporal dos acoplamentos adimensionais fundamentais da natureza, que é inevitável em muitas extensões do modelo padrão atual.

Em nossos estudos, usaremos um modelo com um campo escalar canônico ϕ com um potencial $V(\phi)$ que é responsável pela aceleração cósmica tardia e que interage com todas as outras componentes somente através da gravidade padrão, exceto para o acoplamento com a matéria escura e com o campo eletromagnético (como será discutido posteriormente). Também é um "modelo modificado de matéria", pois o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ do lado direito das equações de Einstein contém uma fonte de matéria exótica com pressão negativa. A equação de estado da quintessência muda dinamicamente com o tempo e a sua densidade de energia não precisa ser muito pequena [23] em relação à radiação e à matéria no Universo primordial, ao contrário da constante cosmológica e de seu cenário.

A ação que descreve o modelo de quintessência é [24]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L} \right] + S_M, \quad (3.1)$$

sendo

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

a densidade lagrangiana do campo escalar canônico, $\kappa^2 = 8\pi G$ e R é o escalar de Ricci.

Vamos considerar também um fluido perfeito com densidade de energia ρ_M , pressão P_M e a seguinte equação de estado

$$\omega_M = \frac{P_M}{\rho_M}.$$

Usaremos M para um fluido perfeito geral, sem classificar em matéria não-relativística ou radiação. Tal fluido satisfaz a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (3.2)$$

ou seja,

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + P_M) = 0. \quad (3.3)$$

O tensor momento-energia da quintessência é:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \quad (3.4)$$

A densidade de energia ρ_ϕ e a pressão P_ϕ do campo no FLRW de fundo são:

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{3}T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (3.5)$$

que geram a equação de estado

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.6)$$

Das equações de Einstein,

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu}$$

obtemos, a partir das componentes (00) e (ii),

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2}$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G P - \frac{K}{a^2}$$

que, em um universo plano ($K=0$), dão origem às seguintes equações de movimento

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right] \quad (3.7)$$

e

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} (\dot{\phi}^2 + \rho_M + P_M), \quad (3.8)$$

em que $\kappa^2 = 8\pi G$. A variação da ação em relação à ϕ é a equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.9)$$

3.1 Sistema Dinâmico

Primeiramente, o que é um sistema dinâmico? Pode ser qualquer coisa, desde algo muito simples, até alguma coisa extremamente complexa como o universo inteiro. Um sistema dinâmico é qualquer sistema abstrato que contém, em geral [25]:

- i) Um espaço de estados ou de fase e;
- ii) uma regra matemática que descreva a evolução de qualquer ponto nesse espaço.

Sendo este último crucial.

O estado do sistema deve estar descrito por um conjunto de quantidades. Para sistemas mais complicados, como o universo, a escolha de boas quantidades não é clara, por isso, é benéfico escolher variáveis convenientes. Podemos analisar o mesmo sistema dinâmico com diversos conjuntos de va-

riáveis, podendo qualquer um desses ser mais apropriado para uma questão mais específica. Existem dois tipos principais de sistema dinâmicos, entretanto no contexto da cosmologia é o sistema dinâmico contínuo que utilizamos, cuja evolução é estabelecida por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs), uma vez que as equações de campo de Einstein em um espaço homogêneo e isotrópico resultam em um sistema de EDOs.

Tendo em mente o modelo padrão da cosmologia resumido à grosso modo

$$\text{INFLAÇÃO} \longrightarrow \text{RADIAÇÃO} \longrightarrow \text{MATÉRIA} \longrightarrow \text{TERMO COSMOLÓGICO}$$

faremos ligações com o sistema dinâmico. Esse modelo deve começar com um período inflacionário, assim, corresponde a um atrator temporal primordial no sistema dinâmico. Todos os autovalores da matriz jacobiana neste ponto devem ser positivos para certificar que todos as trajetórias evoluam para longe deste ponto. Também teríamos dois pontos de sela, que correspondem ao universo dominado pela radiação e pela matéria, respectivamente. Esses pontos garantem que algumas trajetórias sejam atraídas, ocasionalmente sendo repelidas. Desta forma, o universo evoluirá no decorrer das duas épocas. Por fim, precisamos de um atrator tardio em que o universo está sofrendo uma expansão acelerada, correspondendo à solução de de Sitter.

Sistema Dinâmico sem Radiação

Para que possamos estudar a dinâmica cosmológica na presença de um campo escalar e de um fluido de fundo de forma satisfatória, precisamos introduzir variáveis adimensionais [24]:

$$x_1 \equiv \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad x_2 \equiv \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \quad (3.10)$$

Dessa maneira, podemos escrever as equações que geram a dinâmica cosmológica, como a equação de estado efetiva e equação de estado da energia escura. Agora podemos calcular os pontos críticos e classificá-los de acordo com a sua estabilidade.

Assim, podemos escrever a equação

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_M \right] \quad (3.11)$$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa^2}{3H^2} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \rho_M \right] &= 1 \\
\frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{\kappa^2 V(\phi)}{3H^2} + \frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2} &= 1 \\
\left(\frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right)^2 + \left(\frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \right)^2 &= -\frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2} + 1 \\
\left(\frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right)^2 + \left(\frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \right)^2 - 1 &= -\frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2} \\
x_1^2 + x_2^2 - 1 &= -\frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega_M \equiv \frac{\kappa^2 \rho_M}{3H^2} = 1 - x_1^2 - x_2^2} \quad (3.12)$$

Para satisfazer a relação $\Omega_M + \Omega_\phi = 1$, devemos definir a densidade de parâmetro da energia escura:

$$\boxed{\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2} + \frac{\kappa^2 V}{3H^2} = x_1^2 + x_2^2} \quad (3.13)$$

uma vez que,

$$\Omega_\phi + \Omega_M = 1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$$

A partir da equação,

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} (\dot{\phi}^2 + \rho_M + P_M) \quad (3.14)$$

de 3.11 e lembrando que $\omega_M = P_M/\rho_M$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{H}}{H^2} &= -\frac{\kappa^2}{2H^2}(\dot{\phi}^2 + \rho_M + P_M) \\
&= -\frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{2H^2} - \frac{\kappa^2}{2H^2}(\rho_M + P_M) \\
&= -3x_1^2 - \frac{\kappa^2}{2H^2}(\rho_M + P_M) \\
&= -3x_1^2 - \frac{\kappa^2}{2\kappa^2 \rho_M} 3(\rho_M + P_M)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&= -3x_1^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\rho_M}{\rho_M} + \frac{P_M}{\rho_M} \right) (1 - x_1^2 - x_2^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\dot{H}}{H^2} = -3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 + \omega_M)(1 - x_1^2 - x_2^2)} \quad (3.15)$$

Sendo

$$\omega_{eff} = 1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \quad (3.16)$$

teremos que a equação de estado efetiva para este caso é dada por:

$$\begin{aligned}
\omega_{eff} &= -1 - \frac{3}{2} \left[-3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 + \omega_M)(1 - x_1^2 - x_2^2) \right] \\
&= -1 + 2x_1^2 + (1 + \omega_M)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&= -1 + 2x_1^2 + 1 - x_1^2 - x_2^2 + \omega_M - x_1^2 \omega_M - x_2^2 \omega_M \\
&= x_1^2 - x_2^2 + \omega_M - x_1^2 \omega_M - x_2^2 \omega_M
\end{aligned}$$

$$\boxed{\omega_{eff} = \omega_M + x_1^2(1 - \omega_M) - x_2^2(1 + \omega_M)} \quad (3.17)$$

Sendo

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (3.18)$$

a equação de estado da energia escura, podemos escrevê-la como:

$$\omega_\phi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.19)$$

Agora, devemos diferenciar as variáveis adimensionais x_1 e x_2 em relação ao número de *e-foldings*, $N = \ln a$, juntamente com 3.25 e a equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

teremos: Primeiro, vamos lembrar a seguinte relação:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{da/a}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} = H$$

Logo,

$$dN = H dt. \quad (3.20)$$

Dessa forma, fazemos

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dN} &= \frac{d}{dN} \left(\frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right) \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}H} \frac{d\dot{\phi}}{dN} + \left(-\frac{\kappa \dot{\phi}}{\sqrt{6}H^2} \frac{dH}{dN} \right) \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}H} \left(\frac{d\dot{\phi}}{dN} - \frac{\dot{\phi}}{H} \frac{dH}{dN} \right) \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}H} \left(\frac{\ddot{\phi}}{H} - \frac{\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo a equação de Klein-Gordon na equação acima e chamando $dV/d\phi = V'$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}H} \left[\left(\frac{-3H\dot{\phi} - V'}{H} \right) - \frac{\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \right] \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{6}H} \left(-3\dot{\phi} - \frac{V'}{H} - \frac{\dot{\phi}\dot{H}}{H^2} \right) \\
&= -\frac{3\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} - \frac{\kappa V'}{\sqrt{6}H^2} - \frac{\kappa\dot{\phi}\dot{H}}{\sqrt{6}HH^2} \\
&= -3x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\kappa V'}{\sqrt{6}H^2}
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{V'}{\kappa V} \\
V' &= -\lambda \kappa V
\end{aligned}$$

vamos substituir na relação, então,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= -3x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa^2 \lambda V}{\sqrt{6}H^2} \\
&= -3x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2} + 3x_2^2 \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \\
&= -3x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{3\sqrt{6}x_2^2 \lambda}{6} \\
&= -3x_1 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\sqrt{6}\lambda x_2^2}{2}
\end{aligned}$$

Substituindo a equação 3.15 na relação acima, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= -3x_1 - x_1 \left[-3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 + \omega_M)(1 - x_1^2 - x_2^2) \right] + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 \\
&= -3x_1 - x_1 \left[-3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 - x_1 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2) \right] + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 \\
&= -3x_1 + 3x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^3 + \frac{3}{2}x_1(1 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2) + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 \\
&= -3x_1 + \frac{3}{2}(1 + x_1^2 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2) + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{dx_1}{dN} = -3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1[(1 + \omega_M)x_1^2 + (1 + \omega_M)(1 - x_2^2)]} \quad (3.21)$$

Fazemos o mesmo procedimento para x_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dN} &= \frac{d}{dN} \left(\frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \right) \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{3}H} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{V}}{H} \right) \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{3}H} \left[\frac{Hd(V)^{1/2}/dt - \sqrt{V}dH/dt}{H^2} \right] \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{3}H} \left(\frac{H}{2H^2\sqrt{V}} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} - \sqrt{V} \frac{\dot{H}}{H^2} \right),
\end{aligned}$$

pois,

$$\frac{d(V)^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dt},$$

já que V depende de ϕ , que por sua vez, depende do tempo. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dN} &= \frac{\kappa V' \dot{\phi}}{2\sqrt{3}H^2\sqrt{V}} - \frac{\kappa\sqrt{V}}{H\sqrt{3}} \frac{\dot{H}}{H^2} \\
&= -\frac{\kappa^2\lambda\dot{\phi}V}{2H^2\sqrt{3}\sqrt{V}} - \frac{\kappa\sqrt{V}}{H\sqrt{3}} \frac{\dot{H}}{H^2} \\
&= -\frac{\lambda\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \frac{\kappa\dot{\phi}}{2H} - \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \frac{\dot{H}}{H^2} \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 - x_2 \left(-3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 + \omega_M)(1 - x_1^2 - x_2^2) \right) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 - x_2 \left(-3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2) \right) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_1^2 x_2 + \frac{3}{2}x_2(1 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_2(1 + x_1^2 - x_2^2 + \omega_M - \omega_M x_1^2 - \omega_M x_2^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dx_2}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_2[(1 - \omega_M)x_1^2 + (1 + \omega_M)(1 - x_2^2)]} \quad (3.22)$$

Quem caracteriza a inclinação do campo potencial é a quantidade λ , a qual obedece a seguinte relação:

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2(\Gamma - 1)x_1 \quad (3.23)$$

em que

$$\Gamma \equiv V \frac{d^2 V}{d\phi^2} \frac{1}{(dV/d\phi)^2}$$

Se λ é constante, sua integração fornece um potencial exponencial:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= -\frac{dV}{d\phi} \frac{1}{\kappa V} \\
 \lambda d\phi &= -dV \frac{1}{\kappa V} \\
 -\lambda \int_0^\phi d\phi' &= \frac{1}{\kappa} \int_{V_0}^V dV \frac{1}{V} \\
 -\lambda \phi \kappa &= \ln(V) - \ln(V_0) \\
 &= \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \\
 e^{-\kappa \lambda \phi} &= \frac{V}{V_0}
 \end{aligned}$$

$$V = V_0 e^{-\kappa \lambda \phi}$$

(3.24)

Este potencial corresponde à $\Gamma = 1$. Neste caso, as derivadas de x_1 e x_2 (equações autônomas) estão fechadas. A dinâmica cosmológica pode ser bem entendida estudando os pontos fixos do sistema, como mostraremos a seguir. A dinâmica cosmológica para um potencial exponencial será discutida.

3.1.1 Potencial Exponencial

Os pontos fixos do sistema podem ser derivados definindo $dx_1/dN = dx_2/dN = 0$. Os pontos fixos são, geralmente, a solução do sistema dinâmico e dão uma descrição qualitativa inicial do espaço de fase, podendo ser classificados de acordo com suas propriedades de estabilidade. Se não existirem singularidades ou atratores estranhos, as trajetórias relacionadas a $x_1(N)$ e $x_2(N)$, em geral, podem ser obtidas numericamente, passando de pontos fixos instáveis para estáveis, correndo ao longo dos pontos de "sela".

Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dN} &= 0 \\
 0 &= \frac{dx_1}{dN} = -3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1[(1 + \omega_M)x_1^2 + (1 + \omega_M)(1 - x_2^2)] \\
 0 &= -3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}\omega_M x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_1 x_2^2 + \frac{3}{2}x_1 \omega_M - \frac{3}{2}\omega_M x_1 x_2^2 \\
 0 &= -\frac{3}{2}x_1 \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}\omega_M x_1^2 - \frac{3}{2}x_1 x_2^2 + \frac{3}{2}x_1 \omega_M - \frac{3}{2}\omega_M x_1 x_2^2
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dN} &= 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_2(x_1^2 - x_1^2\omega_M + 1 - x_2^2 + \omega_M - x_2^2\omega_M) &= 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_2 x_1^2 - \frac{3}{2}x_2 x_1^2 \omega_M + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2 \omega_M - \frac{3}{2}x_2^3 \omega_M &= 0\end{aligned}$$

No nosso caso, não teremos a equação de estado para um fluido perfeito geral, (M), logo $\omega_M = 0$.

Dessa forma, ficamos com as seguintes equações:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3x_1^2 - \frac{3}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (3.25)$$

$$\omega_{eff} = x_1^2 - x_2^2 \quad (3.26)$$

$$\frac{dx_1}{dN} = -3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1(x_1^2 + 1 - x_2^2) = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 + \frac{3}{2}x_2(x_1^2 + 1 - x_2^2) = 0 \quad (3.28)$$

3.1.2 Pontos Críticos

Para encontrarmos os pontos críticos, vamos, primeiramente, multiplicar 3.27 por x_2 e 3.28 por x_1

$$\begin{cases} -3x_1 x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^3 + \frac{3}{2}x_1 x_2(x_1^2 + 1 - x_2^2) = 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 x_2 + \frac{3}{2}x_2 x_1(x_1^2 + 1 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Agora, igualando as duas equações

$$\begin{aligned}
-3x_1x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^3 + \frac{3}{2}x_1x_2(x_1^2 + 1 - x_2^2) &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2x_2 + \frac{3}{2}x_2x_1(x_1^2 + 1 - x_2^2) \\
-3x_1x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^3 &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2x_2 \\
x_2 \left(-3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 \right) &= x_2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 \right) \\
-3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
\Omega_\phi &= x_1^2 + x_2^2 = 1 \\
x_2^2 &= \Omega_\phi - x_1^2
\end{aligned}$$

e substituindo, temos:

$$\begin{aligned}
-3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda(\Omega_\phi - x_1^2) + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 &= 0 \\
-3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\Omega_\phi - \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1^2 &= 0 \\
3x_1 &= \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\Omega_\phi
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{6}\Omega_\phi}$$

Para x_2 teremos:

$$\begin{aligned}
x_2^2 &= \Omega_\phi - \left(\frac{\lambda\Omega_\phi}{\sqrt{6}} \right)^2 \\
x_2 &= \sqrt{\Omega_\phi - \left(\frac{\lambda\Omega_\phi}{\sqrt{6}} \right)^2} \\
&= \sqrt{\Omega_\phi^2 \left(\frac{1}{\Omega_\phi} - \frac{\lambda^2}{6} \right)}
\end{aligned}$$

$$x_2 = \Omega_\phi \sqrt{\frac{1}{\Omega_\phi} - \frac{\lambda^2}{6}}$$

Portanto, fazendo $\Omega_\phi = 1$, teremos um ponto crítico:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \right)$$

Para $\Omega_\phi = 0$, teremos o seguinte ponto fixo:

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

Agora, vamos fixar $x_1 = 0$ em 3.28:

$$\frac{3}{2}x_2(1 - x_2^2) = 0$$

Logo, $x_2 = 0$.

E fazendo $x_2 = 0$ em 3.27:

$$\begin{aligned} -3x_1 + \frac{3x_1}{2}(x_1^2 + 1) &= 0 \\ -3x_1 + \frac{3x_1}{2}x_1^2 + \frac{3x_1}{2} &= 0 \\ -\frac{3x_1}{2} + \frac{3x_1^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{3x_1}{2}(x_1^2 - 1) = 0$$

Assim, teremos $x_1 = 0, 1, -1$.

Devemos encontrar mais um ponto crítico. Para tanto, faremos a seguinte relação:

$$x_2 = \theta x_1$$

em que θ é um parâmetro a ser encontrado. Dessa forma, substituindo em 3.27 e 3.28, teremos que:

$$\begin{cases} -3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\theta^2x_1 + \frac{3}{2}(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) = 0* \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\theta x_1 + \frac{3}{2}\beta(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) = 0 \end{cases}$$

Agora, multiplicando a segunda relação por θ e somando com a primeira, ficamos com:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\theta^2x_1 + \frac{3}{2}\theta^2(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) - 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda\theta^2x_1 + \frac{3}{2}(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) &= 0 \\ -3 + \frac{3}{2}\theta^2(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) + \frac{3}{2}(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) &= 0 \\ -3 + \frac{3}{2}(1 + \theta^2)(x_1^2 + 1 - \theta^2x_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

Note que $\theta^2 = 1$ é uma solução para a equação acima. Assim, substituindo na equação (*):

$$\begin{aligned} -3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 + \frac{3}{2}(x_1^2 + 1 - x_1^2) &= 0 \\ -3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 + \frac{3}{2} &= 0 \\ -3 + \sqrt{6}\lambda x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{3}{\sqrt{6}\lambda}} \quad (3.29)$$

Consequentemente, para x_2 :

$$x_2 = \theta x_1$$

$$\boxed{x_2 = \frac{3}{\sqrt{6}\lambda}} \quad (3.30)$$

E, portanto, para Ω_ϕ , temos:

$$\begin{aligned}\Omega_\phi &= x_1^2 + x_2^2 \\ \Omega_\phi &= \frac{9}{6\lambda^2} + \frac{9}{6\lambda^2} \\ \Omega_\phi &= \frac{18}{6\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega_\phi = \frac{3}{\lambda^2}} \quad (3.31)$$

A partir disso, podemos construir os pontos críticos para λ constante:

$$(a) (x_1, x_2) = (0, 0), \quad \Omega_\phi = 0$$

$$\omega_\phi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\omega_\phi = \textit{indefinido}$$

$$\omega_{eff} = x_1^2 - x_2^2$$

$$\omega_{eff} = 0$$

Vemos aqui que esse ponto é uma solução em que um fluido é dominante, pois $\Omega_M = 1$ (já que $\Omega_\phi = 0$).

$$(b1) (x_1, x_2) = (1, 0), \quad \Omega_\phi = 1$$

$$\omega_\phi = \frac{1 - 0}{1 + 0}$$

$$\omega_\phi = 1$$

$$\omega_{eff} = 1 - 0$$

$$\omega_{eff} = 1$$

$$(b2) (x_1, x_2) = (-1, 0), \quad \Omega_\phi = 1$$

$$\omega_\phi = \frac{(-1)^2 - 0}{(-1)^2 + 0}$$

$$\omega_\phi = 1$$

$$\omega_{eff} = (-1)^2 - 0$$

$$\omega_{eff} = 1$$

Para os pontos (b1) e (b2) temos que a energia cinética é dominante. Nesse caso, ρ_ϕ cai rapidamente em relação à densidade de fundo.

$$(c) (x_1, x_2) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \right), \quad \Omega_\phi = 1$$

$$\omega_\phi = \frac{\lambda^2/6 - (1 - \lambda^2/6)}{\lambda^2/6 + (1 - \lambda^2/6)}$$

$$= \frac{\lambda^2/6 - 1 + \lambda^2/6}{\lambda^2/6 + 1 - \lambda^2/6}$$

$$= \frac{2\lambda^2}{6} - 1$$

$$\omega_\phi = \frac{\lambda^2}{3} - 1$$

$$\begin{aligned}
\omega_{eff} &= \frac{\lambda^2}{6} - \left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{6} - 1 + \frac{\lambda^2}{6} \\
&= \frac{2\lambda^2}{6} - 1 \\
\omega_{eff} &= \frac{\lambda^2}{3} - 1
\end{aligned}$$

Este ponto corresponde à uma solução com o campo escalar dominante, o qual existe para $\lambda^2 < 6$. Se tivermos $\omega_{eff} < -1/3$, ou seja, $\lambda^2 < 2$ teremos a aceleração cósmica. Podemos recuperar a equação de estado da constante cosmológica, $\omega_{eff} = \omega_\phi = -1$, no limite que $\lambda \rightarrow 0$.

$$(d) (x_1, x_2) = \left(\frac{3}{\sqrt{6\lambda}}, \frac{3}{\sqrt{6\lambda}}\right), \quad \Omega_\phi = \frac{3}{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned}
\omega_\phi &= \frac{9/6\lambda^2 - 9/6\lambda^2}{9/6\lambda^2 + 9/6\lambda^2} \\
\omega_\phi &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{eff} &= \frac{9}{6\lambda^2} - \frac{9}{6\lambda^2} \\
\omega_{eff} &= 0
\end{aligned}$$

O ponto acima é chamado de solução de escala, em que temos que a razão Ω_ϕ/Ω_M é uma constante não nula. Tal solução exige que $\lambda^2 > 3$, pois $\Omega_\phi < 1$. Se $\omega_\phi = \omega_M$ para essas soluções de escala, não será possível percebermos a aceleração cósmica, a menos que tenhamos uma equação de estado incomum para o fluido de matéria, $\omega_M < -1/3$.

Para encontrar a estabilidade em torno dos pontos fixos (x'_1, x'_2) , derivados acima, consideramos as perturbações lineares $(\delta x_1, \delta x_2)$:

$$x_1 = x'_1 + \delta x_1 \quad x_2 = x'_2 + \delta x_2$$

Assim, vamos linearizar as equações 3.27 e 3.28:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dN} &= -3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 + \frac{3}{2}x_1(x_1^2 + 1 - x_2^2) = 0 \\
 \frac{d(x'_1) + d(\delta x_1)}{dN} &= -3(x'_1 + \delta x_1) + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda(x'_2 + \delta x_2)^2 + \frac{3}{2}(x'_1 + \delta x_1)[(x'_1 + \delta x_1)^2 + 1 - (x'_2 + \delta x_2)^2] \\
 \frac{d(\delta x_1)}{dN} &= -3x'_1 + 3\delta x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2'^2 + \sqrt{6}\lambda x'_2 \delta x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda \delta x_2^2 + \frac{3}{2}x_1'^3 + \frac{3}{2}x'_1(2x'_1 \delta x_1) + \frac{3}{2}x'_1 \delta x_1^2 \\
 &\quad + \frac{3}{2}x'_1 - \frac{3}{2}x'_1 x_2'^2 - 3x'_1 x'_2 \delta x_2 - \frac{3}{2}x'_1 \delta x_2^2 + \frac{3}{2}x_1'^2 \delta x_1 + \frac{3}{2}\delta x_1(2x'_1 \delta x_1) + \frac{3}{2}\delta x_1 \delta x_1^2 + \frac{3}{2}\delta x_1 \\
 &\quad - \frac{3}{2}x_2'^2 \delta x_1 - 3x'_2 \delta x_1 \delta x_2 - \frac{3}{2}\delta x_1 \delta x_2^2
 \end{aligned}$$

Como estamos considerando apenas perturbações de primeira ordem, vamos desconsiderar termos de segunda ordem ¹. Dessa forma, teremos:

$$\frac{d\delta x_1}{dN} = \frac{9}{2}x'_1 + \frac{9}{2}\delta x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2'^2 + \sqrt{6}\lambda x'_2 \delta x_2 + \frac{3}{2}x_1'^3 + 3x_1'^2 \delta x_1 - \frac{3}{2}x'_1 x_2'^2 - 3x'_1 x'_2 \delta x_2 + \frac{3}{2}x_1'^2 \delta x_1 - \frac{3}{2}x_2'^2 \delta x_1$$

Separando as perturbações dos outros termos, temos:

$$\frac{d\delta x_1}{dN} = \frac{9}{2}x'_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2'^2 + \frac{3}{2}x_1'^3 - \frac{3}{2}x'_1 x_2'^2 + \frac{9}{2}\delta x_1 + 3x_1'^2 \delta x_1 + \frac{3}{2}x_1'^2 \delta x_1 - \frac{3}{2}x_2'^2 \delta x_1 + \sqrt{6}\lambda x'_2 \delta x_2 - 3x'_1 x'_2 \delta x_2$$

Agora, fazendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{9}{2}x'_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2'^2 + \frac{3}{2}x_1'^3 - \frac{3}{2}x'_1 x_2'^2 \\
 \beta &= \frac{9}{2} + 3x_1'^2 + \frac{3}{2}x_1'^2 - \frac{3}{2}x_2'^2 \\
 \gamma &= \sqrt{6}\lambda x'_2 - 3x'_1 x'_2
 \end{aligned}$$

Por conseguinte, podemos escrever a equação da forma

¹ Em que $\delta x^2 \equiv (\delta x)^2$. Não confundir com $\delta(x^2)$.

$$\frac{d(\delta x_1)}{dN} = \theta + \beta \delta x_1 + \gamma \delta x_2$$

Agora, fazemos o mesmo procedimento para 3.28.

$$\begin{aligned} \frac{d(x'_2 + \delta x_2)}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda (x'_1 + \delta x_1) (x'_2 + \delta x_2) + \frac{3}{2} (x'_2 + \delta x_2) [(x'_1 + \delta x_1)^2 + 1 - (x'_2 + \delta x_2)^2] \\ \frac{d(\delta x_2)}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_1 x'_2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_2 \delta x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda \delta x_1 \delta x_2 + \frac{3}{2} x'_2 x_1'^2 + 3x'_2 \delta x_1 + \frac{3}{2} x'_2 \delta x_2^2 + \frac{3}{2} x'_2 - \frac{3}{2} x_2'^3 + \\ &\quad - 3x_2'^2 \delta x_2 - \frac{3}{2} x_2' \delta x_2^2 + \frac{3}{2} x_2'^1 \delta x_2 + 3x'_1 \delta x_2 \delta x_1 + \frac{3}{2} \delta x_2 \delta x_2^2 + \frac{3}{2} \delta x_2 - \frac{3}{2} x_2'^2 \delta x_2 - 3x'_2 \delta x_2^2 - \frac{3}{2} \delta x_2^3 \end{aligned}$$

Considerando somente os termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta x_2)}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_1 x'_2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_1 \delta x_2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_2 \delta x_1 + \frac{3}{2} x'_2 x_1'^2 + 3x'_2 x'_1 \delta x_1 + \frac{3}{2} x'_2 - \frac{3}{2} x_2'^3 - 3x_2'^2 \delta x_2 + \frac{3}{2} x_1'^2 \delta x_2 + \\ &\quad + \frac{3}{2} \delta x_2 - \frac{3}{2} x_2'^2 \delta x_2 \end{aligned}$$

Separando as perturbações:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta x_2)}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_1 x'_2 + \frac{3}{2} x'_2 x_1'^2 + \frac{3}{2} x'_2 - \frac{3}{2} x_2'^3 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_2 \delta x_1 + 3x'_2 x'_1 \delta x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda x'_1 \delta x_2 - 3x_2'^2 \delta x_2 + \frac{3}{2} x_1'^2 \delta x_2 + \\ &\quad + \frac{3}{2} \delta x_2 - \frac{3}{2} x_2'^2 \delta x_2 \end{aligned}$$

Assim, separando as constantes, teremos:

$$\frac{d(\delta x_2)}{dN} = \bar{\theta} + \bar{\beta} \delta x_1 + \bar{\gamma} \delta x_2$$

A partir disso, podemos escrever as equações diferenciais da seguinte forma:

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\delta x_1)/dN \\ d(\delta x_2)/dN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + \beta \delta x_1 + \gamma \delta x_2 \\ \bar{\theta} + \bar{\beta} \delta x_1 + \bar{\gamma} \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \delta x_1 + \gamma \delta x_2 \\ \bar{\beta} \delta x_1 + \bar{\gamma} \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \bar{\beta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Temos, assim (omitindo as constantes):

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

em que \mathcal{M} é a matriz cujos componentes dependem de x'_1 e x'_2 .

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(-3 + 3x_1'^2 - x_2'^2) & \sqrt{6}\lambda x_2' - 3x_1'x_2' \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2' + 3x_1'x_2' & -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1' + \frac{3}{2}(-3x_2'^2 + x_1'^2 + 1) \end{pmatrix}$$

Os autovalores da matriz \mathcal{M} são dados pela relação:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}]$$

em que a_{ij} são os componentes da matriz. São os autovalores que determinam o comportamento das soluções ao redor dos pontos fixos.

Assim, teremos os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{4}[-\sqrt{6}\lambda x_1 + 12x_1^2 - 12x_2^2 - \sqrt{6}[\lambda^2(x_1^2 - 8x_2^2) + 2\sqrt{6}\lambda x_1(-1 + x_1^2 + 7x_2^2) + \\ &+ 6(x_1^4 + (-1 + x_2^2)^2 - 2x_1^2(1 + x_2^2))]]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{4}[-\sqrt{6}\lambda x_1 + 12x_1^2 - 12x_2^2 + \sqrt{6}[\lambda^2(x_1^2 - 8x_2^2) + 2\sqrt{6}\lambda x_1(-1 + x_1^2 + 7x_2^2) + \\ &+ 6(x_1^4 + (-1 + x_2^2)^2 - 2x_1^2(1 + x_2^2))]]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Chamando o discriminante de $\mathcal{D} \equiv (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, a estabilidade dos pontos fixos pode ser classificada, geralmente, da seguinte forma:

i) Nó estável: $\mathcal{D} > 0$ e $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$;

- ii) Nó instável: $\mathcal{D} > 0$ e $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$;
- iii) Ponto de sela: $\mathcal{D} > 0$ e $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ (ou $\mu_1 > 0$ e $\mu_2 < 0$);
- iv) Espiral estável: $\mathcal{D} < 0$ e as partes reais de μ_1 e μ_2 são negativas;
- v) Espiral instável: $\mathcal{D} < 0$ e as partes reais de μ_1 e μ_2 são positivas.

Se o $\det \mathcal{M} = 0$, então a matriz \mathcal{M} é singular e o sistema se torna efetivamente unidimensional em torno do ponto fixo. Esta classificação pode ser estendida para mais dimensões: um ponto fixo é estável se todas as partes reais dos autovalores são negativas, instável se todas forem positivas e ponto de sela quando existirem partes negativas e positivas reais. Se um autovalor se anula, a estabilidade pode ser estabelecida expandindo para ordens superiores.

Os autovalores dos pontos fixos acima são dados por:

Ponto (a): $\mu_1 = -\frac{3}{2}, \mu_2 = \frac{3}{2}$;

Ponto (b1): $\mu_1 = 3 - \frac{\sqrt{6}\lambda}{2}, \mu_2 = 3$;

Ponto (b2): $\mu_1 = 3, \mu_2 = 3 + \frac{\sqrt{6}\lambda}{2}$;

Ponto (c): $\mu_1 = \frac{\lambda^2}{2} - 3, \mu_2 = \lambda^2 - 3$;

Ponto (d): $\mu_1 = -\frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8(\lambda^2-3)}{\lambda^2}} \right), \mu_2 = \frac{3}{4} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{8(\lambda^2-3)}{\lambda^2}} \right)$.

Vamos considerar o caso em que a equação de estado do fluido é igual à zero (como já vínhamos fazendo). Portanto, a estabilidade dos pontos fixos é resumida da seguinte forma:

Ponto(a): Ponto de sela;

Ponto(b1): Nó instável para $\lambda < \sqrt{6}$ e ponto de sela para $\lambda > \sqrt{6}$;

Ponto(b2): Nó instável para $\lambda > -\sqrt{6}$ e ponto de sela para $\lambda < -\sqrt{6}$;

Ponto(c): Nó estável para $\lambda^2 < 3$ e ponto de sela para $3 < \lambda^2 < 6$;

Ponto(d): Ponto de sela para $\lambda^2 < 3$, nó estável para $3 < \lambda^2 < 24/7$ e espiral estável para $\lambda^2 > 24/7$.

Assim, temos a tabela com os pontos críticos relacionados a Ω_ϕ , ω_ϕ , ω_{eff} e N :

	x_1	x_2	Ω_ϕ	ω_ϕ	ω_{eff}
a)	0	0	0	—	0
b1)	1	0	1	1	1
b2)	-1	0	1	1	1
c)	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right)^{1/2}$	1	$-1 + \frac{\lambda^2}{3}$	$-1 + \frac{\lambda^2}{3}$
d)	$\frac{3}{\lambda\sqrt{6}}$	$\frac{3}{\lambda\sqrt{6}}$	$\frac{3}{\lambda^2}$	0	0

A época dominada pela matéria (ω_M) pode ser observada no ponto (a) ou (d). Para $\lambda^2 > 3$, as soluções se aproximam do ponto fixo estável (d), ao invés do ponto (a). No entanto, nesse caso as soluções não saem da era da escala ($\Omega_\phi = cte$) para se conectarem à época acelerada.

O único ponto que dá origem a um atrator acelerado estável é o (c) para $\lambda^2 < 2$. Não há uma solução com significado físico para (d) quando $\lambda^2 < 2$, já que $\Omega_\phi > 1$ tanto para radiação como para matéria. Nesse caso, a era dominada pela matéria é observada no ponto (a).

Sistema Dinâmico com Radiação e acoplamento à matéria escura

Agora, fazemos o mesmo procedimento, porém com radiação e interação.

Primeiro, consideraremos uma interação entre um campo escalar ϕ e uma matéria não-relativística na seguinte forma [24]

$$\nabla_\mu T_{\nu(\phi)}^\mu = -QT_M \nabla_\nu \phi, \quad \nabla_\mu T_{\nu(M)}^\mu = +QT_M \nabla_\nu \phi, \quad (3.34)$$

em que $T_{\nu(\phi)}^\mu$ e $T_{\nu(M)}^\mu$ são os tensores momento-energia do campo escalar e da matéria, respectivamente, com o traço $T_M = -\rho_M + 3P_M$ do fluido de matéria. Como a radiação não tem traço ($\rho_M = 3P_M$), os termos dependentes do acoplamento zeram em (3.34). Enquanto isso, a matéria escura e os bárions (matéria não-relativística) tem acoplamentos diretos com o campo escalar ϕ .

Normalmente, a força de acoplamento Q dos bárions é diferente do da matéria escura. Admitindo que aqueles estão totalmente desacoplados, eles acabam seguindo geodésicas, logo podemos comparar os resultados com observações, já que, geralmente, em qualquer experimento clássico assumimos que os nossos equipamentos não possuem interações além da gravidade.

Os bárions seguem geodésicas no chamado quadro(frame) "físico", que significa que podemos comparar resultados e observações diretamente.

Apesar de assumirmos que os bárions estão desacoplados, isso quase não faz diferença, pois eles são subdominantes.

Consideramos Q constante e $\kappa^2 = 1$.

O campo de densidade lagrangiana da quintessência acoplada é

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{int} \quad (3.35)$$

em que o termo \mathcal{L}_{int} origina o tensor momento-energia de interação dada em (3.34). Usamos o mesmo potencial (3.24) anterior.

Para a interação dada em (3.35), o campo escalar ϕ , a matéria não-relativística m e a radiação r obedecem as seguintes equações de movimento na métrica de FLRW plana de fundo

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = -Q\rho_m\dot{\phi}, \quad (3.36)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = +Q\rho_m\dot{\phi}, \quad (3.37)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (3.38)$$

juntamente com a equação de Friedmann

$$3H^2 = \rho_\phi + \rho_m + \rho_r \quad (3.39)$$

Sabendo que

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad e \quad P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

podemos reescrever a equação (3.36) da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + 3H \left[\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) + \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) \right] = -Q\rho_m\dot{\phi}$$

o resultado da derivação do lado primeiro termo do lado esquerdo é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}2\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{dt} &= \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ &= \dot{\phi}\ddot{\phi} + V_{,\phi} \end{aligned}$$

substituindo, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\ddot{\phi} + V_{,\phi}) + 3H \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right) &= -Q\rho_m \dot{\phi} \\ \dot{\phi}(\ddot{\phi} + V_{,\phi}) + 3H\dot{\phi}^2 &= -Q\rho_m \dot{\phi}\end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + V_{,\phi} + 3H\dot{\phi} = -Q\rho_m} \quad (3.40)$$

Novamente, para estudarmos a dinâmica do sistema, devemos introduzir variáveis, contudo desta vez não serão apenas duas, mas sim três:

$$x_1 \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6H}}, \quad x_2 \equiv \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3H}}, \quad x_3 \equiv \frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3H}} \quad (3.41)$$

Fazendo a derivada de (3.39) em relação ao número de *e-foldings* N junto com as equações (3.37), (3.36) e (3.38), temos que:

o resultado da derivada é

$$\frac{d}{dN}(3H^2) = \frac{d}{dN}(\rho_\phi + \rho_m + \rho_r) \Rightarrow 6H \frac{dH}{dN} = \frac{\dot{\rho}_\phi}{H} + \frac{\dot{\rho}_m}{H} + \frac{\dot{\rho}_r}{H},$$

agora, substituindo

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dN} = -\frac{1}{2} \left(\frac{3\dot{\phi}^2}{6H^2} - \frac{3V}{3H^2} + 3 + \frac{\rho_r}{3H^2} \right)$$

logo

$$\boxed{\frac{1}{H} \frac{dH}{dN} = -\frac{1}{2}(3x_1^2 - 3x_2^2 + 3 + x_3^2)} \quad (3.42)$$

A equação de estado efetiva é

$$\omega_{eff} = 3x_1^2 - 3x_2^2 + \frac{3x_3^2}{3} \quad (3.43)$$

A equação de estado ω_ϕ e o parâmetro de densidade Ω_ϕ do campo escalar continuam sendo as mesmas do cenário anterior, no caso (3.19) e (3.13), respectivamente. Temos também

$$\Omega_m = 1 - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 \quad (3.44)$$

Agora, fazendo analogamente ao caso anterior, obtemos as equações autônomas para x_1, x_2 e x_3 , que são:

$$\frac{dx_1}{dN} = 3x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_2^2 - x_1 \frac{1}{H} \frac{dH}{dN} - \frac{\sqrt{6}}{2}Q(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \quad (3.45)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda x_1 x_2 - x_2 \frac{1}{H} \frac{dH}{dN} \quad (3.46)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -2x_3 - x_3 \frac{1}{H} \frac{dH}{dN} \quad (3.47)$$

cujos pontos fixos estão listados na tabela abaixo.

	x_1	x_2	x_3	Ω_ϕ	Ω_r	ω_ϕ	ω_{eff}
a)	$-\frac{\sqrt{6}Q}{3}$	0	0	$\frac{2Q^2}{3}$	0	1	$\frac{2Q^2}{3}$
b1)	1	0	0	1	0	1	1
b2)	-1	0	0	1	0	1	1
c)	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\left(1 - \frac{\lambda^2}{6}\right)^2$	0	1	0	$-1 + \frac{\lambda^2}{3}$	$-1 + \frac{\lambda^2}{3}$
d)	$\frac{\sqrt{6}}{2(Q+\lambda)}$	$\left[\frac{2Q(Q+\lambda)+3}{2(Q+\lambda)^2}\right]^{1/2}$	0	$\frac{Q(Q+\lambda)+3}{(Q+\lambda)^2}$	0	$\frac{-Q(Q+\lambda)}{Q(Q+\lambda)+3}$	$\frac{-Q}{Q+\lambda}$
e)	0	0	1	0	1	-	$\frac{1}{3}$
f)	$-\frac{1}{Q\sqrt{6}}$	0	$\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{1/2}$	$\frac{1}{6Q^2}$	$1 - \frac{1}{2Q^2}$	1	$\frac{1}{3}$
g)	$\frac{2\sqrt{6}}{3\lambda}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3\lambda}$	$\left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right)^{1/2}$	$\frac{4}{\lambda^2}$	$1 - \frac{4}{\lambda^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Podemos analisar a estabilidade dos pontos críticos considerando três autovalores da matriz jacobiana das perturbações $\delta x_1, \delta x_2$ e δx_3 sobre cada ponto.

Detectamos os pontos responsáveis pelas eras da radiação, matéria e acelerada entre os pontos fixos que estão na tabela acima.

i) Era da Radiação

A época dominada pela radiação pode ser observadas nos pontos e), f) e g), haja visto que eles correspondem à $\omega_{eff} = 1/3$. No entanto, temos duas restrições por conta da nucleossíntese vinculada: $Q^2 > 3,7$ para o ponto f), e $\lambda^2 > 88,9$ para o ponto g). Por conta dessas restrições, o ponto e) é a única solução plausível para a radiação, pois o primeiro caso não é compatível com a presença da época dominada pela matéria, e no último λ é muito grande para ter uma solução acelerada tardia. O ponto e) é um ponto de sela, seguido por uma era de matéria, já que os autovalores da matriz jacobiana 3x3 para perturbações sobre este ponto são

$$\mu = -1, 1, 2. \quad (3.48)$$

ii) Era da Matéria

Podemos observar a época dominada pela matéria nos pontos a) ou d), em que ambas correspondem a soluções de escala com Ω_ϕ e ω_ϕ constantes. Chamamos o ponto a) de "época dominada pela matéria e ϕ " (sendo ϕMDE a sigla em inglês), e para que ela seja encarregada pela era da matéria, é preciso que $Q^2 \ll 1$ para a condição $\Omega_\phi = 2Q^2/3 \ll 1$. Os autovalores para o ponto a) são

$$\mu = \frac{3}{2} + Q(Q + \lambda), -\frac{3}{2} + Q^2, -\frac{1}{2} + Q^2 \quad (3.49)$$

Quando temos $Q^2 \ll 1$, dois dos autovalores são negativos, sendo um deles positivo para $Q(Q + \lambda) > -3/2$, o qual é satisfeito a menos que $Q < 0$ e $\lambda \gg 1$. Por isso, a ϕMDE é um ponto de sela seguido por um ponto de aceleração tardia. Para o ponto d) é possível ter $\omega_{eff} \simeq 0$ para $|\lambda| \gg |Q|$. Os autovalores para este ponto são

$$\mu = \frac{-4Q + \lambda}{2(Q + \lambda)}, \frac{-3(2Q + \lambda)}{4(Q + \lambda)} \left[1 \pm \sqrt{\frac{8[3 - \lambda(Q + \lambda)][3 + 2Q(Q + \lambda)]}{3(2Q + \lambda)^2}} \right]. \quad (3.50)$$

Isso quer dizer que, para $|\lambda| \gg |Q|$, o ponto d) é estável. Logo, as soluções não saem da era da matéria para a época acelerada.

iii) Era Acelerada

A aceleração cósmica tardia pode acontecer nos pontos c) ou d). O ponto c) satisfaz a condição

para a aceleração quando $\lambda^2 < 2$. Os autovalores para o ponto c) são

$$\mu = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 4), \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6), \lambda(Q + \lambda) - 3. \quad (3.51)$$

Este ponto é estável para

$$\lambda(Q + \lambda) < 3 \quad (3.52)$$

quando $\lambda^2 < 2$.

A parcela de energia do campo para o ponto d) satisfaz $\Omega_\phi > 1$ sob a condição acima. A condição para a aceleração para este ponto, $\omega_{eff} < -1/3$, corresponde a $Q > \lambda/2$ ou $Q < -\lambda$ (lembrando que assumimos que λ é positivo). Assim, o interior da raiz de (3.50) é maior que a condição (3.52) com $-\frac{4Q+\lambda}{2(Q+\lambda)} < 0$ e $-\frac{3(2Q+\lambda)}{4(Q+\lambda)} < 0$ em ambos os casos. Dessa forma, um dos autovalores em (3.50) é positivo, ou seja, o ponto d) é um ponto de sela se o ponto c) for estável. O ponto d) será estável enquanto o ponto c) for um ponto de sela se a condição

$$\lambda(Q + \lambda) > 3 \quad (3.53)$$

for satisfeita.

À vista disso, sob as condições (3.53) e $Q > \lambda/2$ ou $Q < -\lambda$, a solução acelerada estável tardia pode ser observada no ponto d). Há a possibilidade de um atrator global acelerado com $\Omega_\phi \simeq 0,7$ permitida peça solução de escala d). Entretanto, não é fácil conseguir a solução ϕMDE de a) seguida de uma solução de escala d), já que a condição $Q^2 \ll 1$ é necessária para termos uma ϕMDE que seja compatível com as observações, enquanto que são precisos valores grandes de $|Q|$ para obter a aceleração cósmica tardia.

Então, após toda a argumentação acima, conseguimos encontrar uma sequência cosmológicamente realizável

$$e) \longrightarrow a) \longrightarrow c) \quad (3.54)$$

As condições $Q^2 \ll 1$ e $Q(Q + \lambda) > -3/2$ são exigidas para a presença de uma sela ϕMDE e a estabilidade do ponto acelerado requer as condições $\lambda^2 < 2$ e $\lambda(Q + \lambda) < 3$.

3.2 Solução Numérica

3.2.1 Solução Numérica sem Radiação

Como estamos interessados no período dominado pela matéria e pela energia escura, desprezaremos a radiação nessa primeira análise numérica. Fizemos diversas simulações com diferentes valores para as condições iniciais, número de *e-foldings* (N) e λ . Abaixo temos alguns exemplos para o primeiro caso, com as duas variáveis x_1 e x_2 .

Comparação entre Ω_ϕ , Ω_M , ω_ϕ e ω_{eff} em diferentes condições

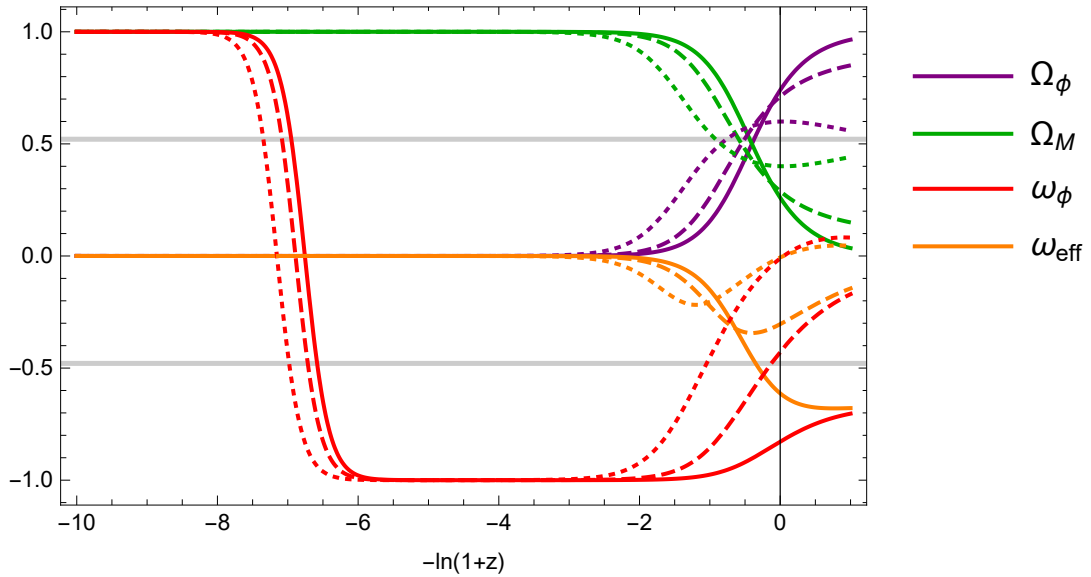


Figura 3.1: A figura ilustra as densidades Ω_ϕ e Ω_M , assim como ω_ϕ e ω_{eff} entre o intervalo de $N = (-10,1)$. A linha contínua indica as condições $x_1 = 0,01, x_2 = 6 \cdot 10^{-7}$ e $\lambda = 1$; a linha tracejada indica $x_1 = 0,1, x_2 = 9 \cdot 10^{-7}$ e $\lambda = 1,8$; e a linha pontilhada indica $x_1 = 0,1, x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ e $\lambda = 2,4$.

Como podemos ver no gráfico acima, o período N entre -10 e -2 , ω_{eff} indica que o Universo é dominado por matéria fria, ou seja, matéria não-relativística, que pode ser poeira e também o conjunto de todas as partículas elementares conhecidas até agora, os bárions. Isso acontece para os três casos que estamos estudando. Após esse período, vemos que as condições indicadas pela linha pontilhada são inviáveis cosmológicamente, pois não concordam com as observações de um Universo acelerado atualmente, uma vez que o valor de ω_{eff} para hoje é zero, o que não caracteriza um Universo em expansão. As condições que melhor se ajustam aos dados observacionais é as que estão representadas pela linha contínua, já que nos indicam um Universo com aceleração hoje em dia. O mesmo não

acontece com a linha tracejada, porque ela não nos mostra uma aceleração em tempos futuros. A figura 3.1 também nos mostra evolução dos parâmetros de densidade do campo escalar (energia escura), Ω_ϕ , e da matéria, Ω_M , para o mesmo intervalo de tempo anterior, $N = (-10, 1)$. Vemos que para os três casos, o Universo é dominado pela matéria até cerca de $N = -3$. Deste modo, concluímos que no passado, os três casos se comportam de maneira conveniente. A partir dessa época, percebemos que as condições iniciais diferentes nos levam a valores diferentes de Ω_M , sendo a mais viável cosmologicamente as condições indicadas pela linha contínua, novamente, dado que é a que melhor ilustra os valores atuais de Ω_ϕ e Ω_M , que estão em torno de $\simeq 0,7$ e $\simeq 0,3$ nos dias de hoje.

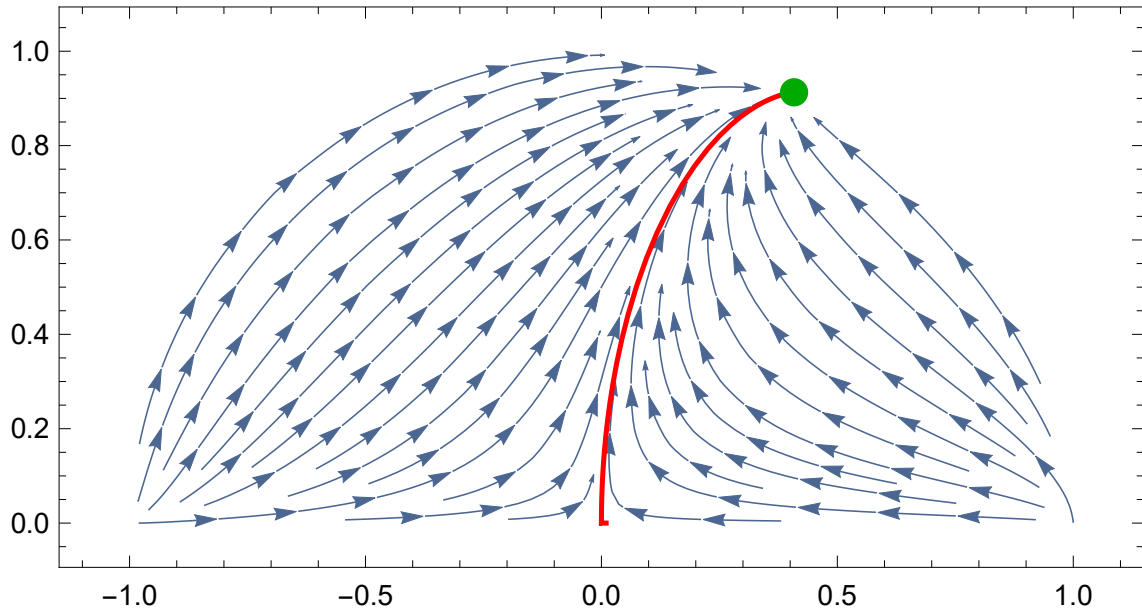


Figura 3.2: Diagrama de fase para $\lambda = 1$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 6.10^{-7}$. O ponto verde indica o atrator.

A figura 3.2 mostra o caso mais possível fisicamente, representado pela linha contínua na análise anterior. Nessa imagem o ponto atrator do sistema está representado pelo ponto verde. Percebemos que a trajetória das nossas soluções alcança esse atrator, caracterizando, assim, a melhor solução que se encaixam nos dados observacionais que temos hoje. Já as figuras 3.3 e 3.4 apresentam o mesmo problema: em ambas os atratores não são alcançados pelas trajetórias das soluções encontradas. Dessa forma, podemos dizer que não são soluções satisfatórias cosmologicamente, já que não indicam uma aceleração cósmica tardia.

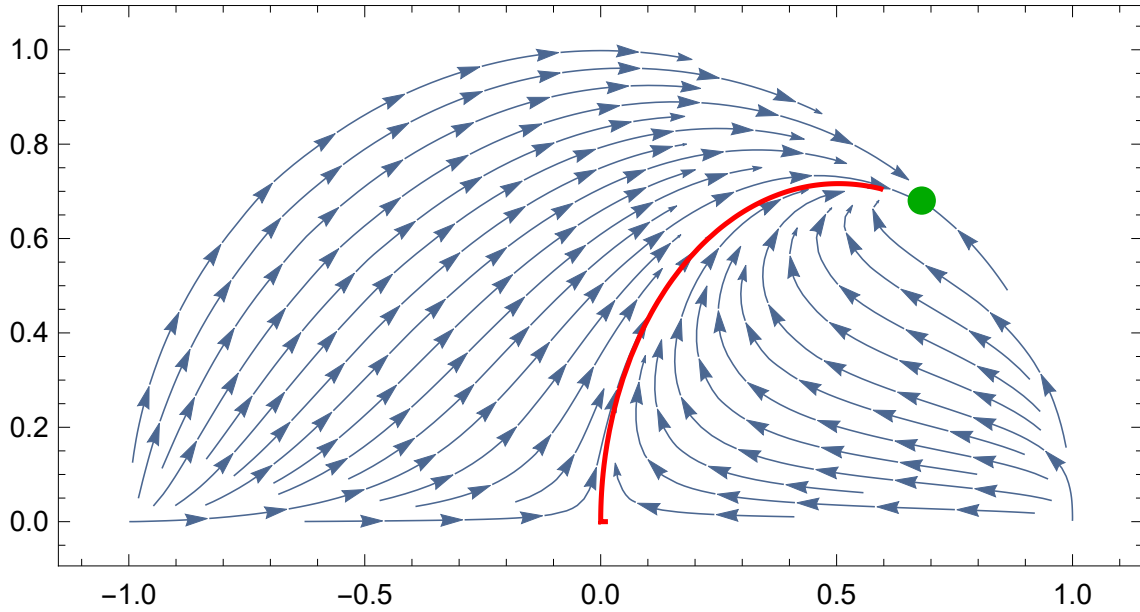


Figura 3.3: Diagrama de fase para $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9.10^{-7}$. O ponto verde indica o atrator.

3.2.2 Solução Numérica com Radiação

Agora, faremos a mesma análise acima, considerando agora a radiação, também com diferentes condições iniciais. Abaixo, temos mais alguns exemplos para o nosso segundo caso, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 .

Nesse novo caso, a radiação está presente, o que muda bastante nossas pesquisas. Em 3.5, analisamos o comportamento dos parâmetros de densidade Ω_ϕ , Ω_M e Ω_r . Aqui vemos que o comportamento de Ω_ϕ para os três casos estudados é muito parecido, sendo todos cosmologicamente possíveis, pois os valores atuais correspondem aos do gráfico. Da mesma forma, temos o fato de a equivalência matéria-energia acontecer em tempos recentes, o que também está de acordo com as observações. O comportamento de Ω_M e Ω_r muda bastante do caso da linha contínua para as outras, o que nos leva a inferir que tais condições não são as melhores, haja visto que a equivalência matéria-radiação acontece muito tarde. Dessa forma, constatamos que entre os dois casos que sobraram, o mais viável fisicamente, de acordo com os dados, é o caso da linha tracejada, já que conta com os melhores valores dos parâmetros de densidade atuais, apesar de ser muito parecida com o caso da linha pontilhada.

Na imagem 3.6, temos o comportamento dos parâmetros das equações de estado ω_ϕ e ω_{eff} com a radiação presente. Assim como acontece com os parâmetros de densidade da figura 3.5, o caso da linha tracejada é o mais factível, pois, apesar de termos um bom comportamento dos outros dois casos

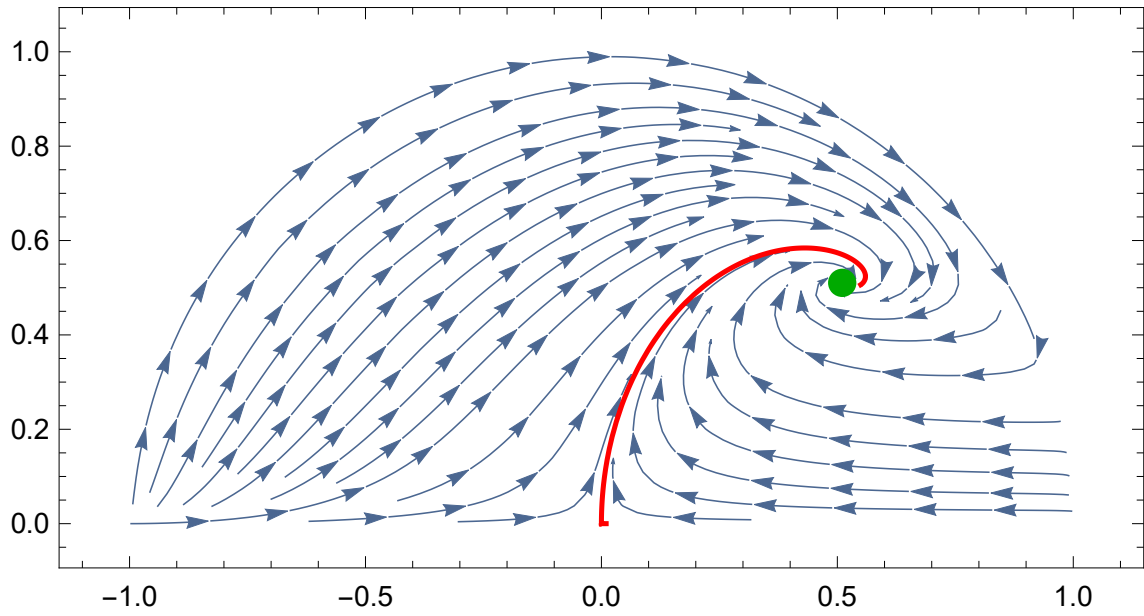


Figura 3.4: Diagrama de fase para $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. O ponto verde indica o atrator.

em tempos passados, é o que melhor mostra o comportamento de ω_{eff} em tempos futuros, com uma aceleração cósmica.

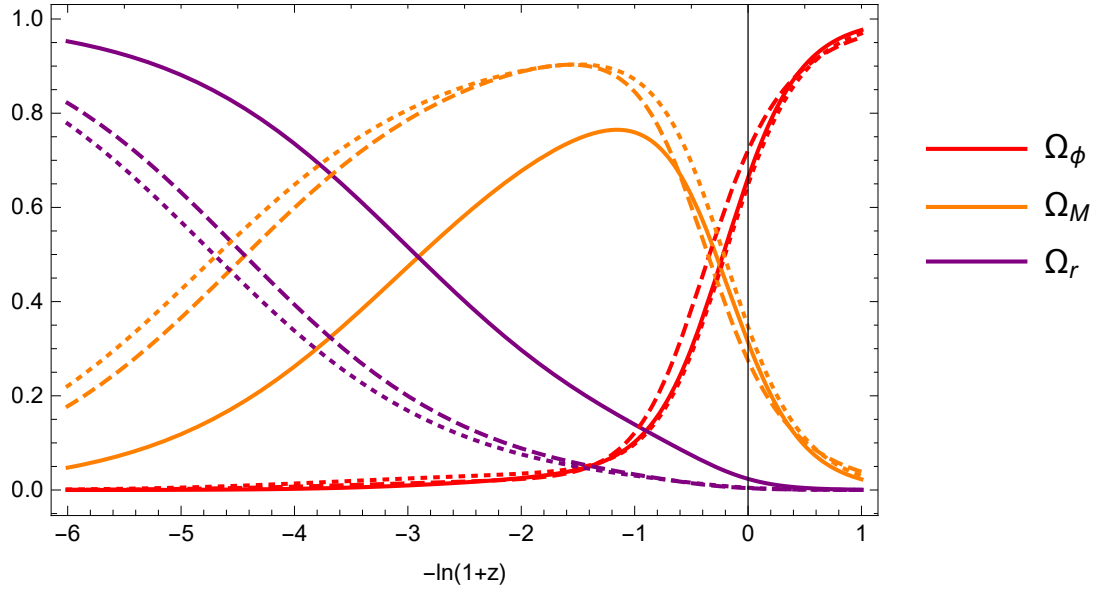


Figura 3.5: A figura ilustra os parâmetros de densidade Ω_ϕ , Ω_M e Ω_r entre o intervalo de $N = (-6, 1)$. A linha contínua indica as condições $x_1 = 0$, $x_2 = 2,95 \cdot 10^{-5}$, $x_3 = 0,976$, $Q = 0,3$ e $\lambda = 0,1$; a linha tracejada indica $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5 \cdot 10^{-8}$, $x_3 = 0,998$, $Q = 0,2$ e $\lambda = 1$; e a linha pontilhada indica $x_1 = 0$, $x_2 = 8 \cdot 10^{-7}$, $x_3 = 0,981$, $Q = 0,25$ e $\lambda = 0,5$.

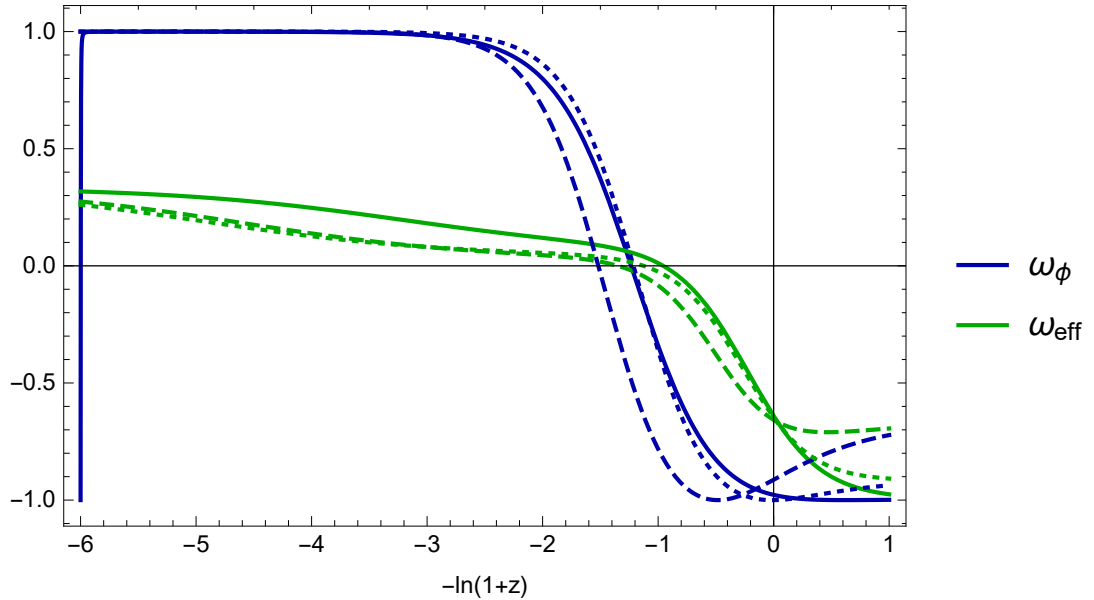


Figura 3.6: A figura ilustra os parâmetros da equação de estado ω_ϕ e ω_{eff} entre o intervalo de $N = (-6, 1)$. A linha contínua indica as condições $x_1 = 0$, $x_2 = 2,95 \cdot 10^{-5}$, $x_3 = 0,976$, $Q = 0,3$ e $\lambda = 0,1$; a linha tracejada indica $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5 \cdot 10^{-8}$, $x_3 = 0,998$, $Q = 0,2$ e $\lambda = 1$; e a linha pontilhada indica $x_1 = 0$, $x_2 = 8 \cdot 10^{-7}$, $x_3 = 0,981$, $Q = 0,25$ e $\lambda = 0,5$.

Capítulo 4

Constantes Fundamentais

4.1 Introdução

Sempre acreditou-se que a ciência era governada por um conjunto de leis imutáveis, as quais deveriam ser iguais em todos os lugares e para todos os tempos. Quase todos os modelos cosmológicos da história possuem essa característica de imutabilidade.

As chamadas constantes fundamentais tem dimensões que estão diretamente relacionadas com a forma e a estrutura das leis físicas e aparecem em todos os lugares nas leis matemáticas que usamos para descrever fenômenos da natureza. Muitas vezes, consegue-se reobter expressões através da análise dimensional dessas constantes. Na prática, deve haver uma constante para cada teoria física conhecida - por exemplo, a velocidade da luz c é a velocidade máxima de uma partícula massiva se movendo em um espaço-tempo plano (na relatividade especial), porém isso não é satisfatório teoricamente, uma vez que não trata da origem das constantes [26].

Essa ideia de que as constantes podiam variar remete à ideia original de Dirac [27], em que ele diz que constantes universais adimensionais muito grandes ou muito pequenas não podem ser números matematicamente puros e que não devem estar nas leis básicas da física. Entretanto, o tema ficou um pouco esquecido durante algum tempo pela comunidade acadêmica, sobretudo por dois motivos: existiam diversos testes sensíveis que indicavam que as constantes não mudavam; e que não havia um quadro teórico plausível que previsse essas mudanças. Atualmente, existem duas frentes de trabalho, basicamente: uma em que os cientistas experimentais tentam reproduzir os resultados e melhorar a precisão das "constantes", enquanto os teóricos tem procurado todo o tipo de explicações possíveis

para tais variações.

4.2 Constantes Fundamentais

Podemos classificar as constantes em dois tipos diferentes: adimensionais, como a constante de estrutura fina, α , e dimensionais, como c , \hbar e G . Com frequência, as constantes consideradas fundamentais são as dimensionais, porém existem autores que propõem chamá-las de "unidades fundamentais"[28]. Também há quem defina uma constante fundamental de uma teoria física como *qualquer parâmetro que não pode ser explicado por esta teoria* [29].

Mas quantas constantes são, de fato, fundamentais? Qual a relação entre elas? Quantas são realmente necessárias para descrever a física? Até hoje, essas questões estão sem uma resposta satisfatória.

Há quem defenda a ideia de que as constantes só são realmente fundamentais quando nos proporcionam uma forma de transformar qualquer quantidade física, seja qual for, em um número puro, cujo significado seja completamente compreensível [26].

Mas existem constantes que são mais fundamentais que outras? Segundo [30], nem todas as constantes da física desempenham o mesmo papel, umas parecem ser mais relevantes que outras. Dessa forma, define-se três classes de constantes fundamentais: a classe A é a das constantes características de um sistema particular; a classe B é a classe das constantes características de uma classe de fenômenos físicos; e a classe C é a das constantes universais. Segundo essa classificação, somente três constantes seriam consideradas universais que são: G , \hbar e c .

Já as constantes adimensionais aparecem como parâmetros em teorias físicas, e são extremamente ricas em significado físico, pois expressam a intensidade de uma interação. Tratar constantes adimensionais nos permite eliminar da variação das constantes uma possível variação no tempo das unidades de medida.

Pelo fato de não podermos calcular as constantes em um quadro teórico em que elas apareçam, é essencial que os seus valores possam ser medidos, por conta disso, é muito importante definir um sistema de unidades coerente.

Sistema de Unidades

No início, as dimensões do corpo humano eram a forma principal de se medir o comprimento dos objetos (pé - pés, polegar - polegadas), sendo algumas delas encontradas até os dias atuais. Para medir a massa, era usado o quanto podia-se carregar em uma mão (onça, libra, entre outros). Não é difícil perceber que esse tipo de sistema tinha diversos problemas, pelo fato de cada região ter seu próprio sistema (havia locais, como a França, em que existiam mais de 800 unidades diferentes sendo usadas em 1789).

Somente durante a Revolução Francesa, em 1789, que a ideia de um sistema universal surgiu. Em maio de 1790, foi adotado um sistema uniforme de pesos e medidas. Em março do ano seguinte, 1791, foi votado um decreto que afirmava que um quarto do meridiano terrestre seria a base da definição de *metro*. Foi feito algo similar com a *grama*, que foi definida como a massa de um centímetro cúbico (cm^3) de água destilada [29]. Isso acabou levando à criação do sistema métrico e, posteriormente, à criação do *Sistema Internacional de Unidades (SI)* (do francês *Le Système International d'Unités*), em 1960. Desde então, a definição das unidades tem evoluído bastante [31].

De acordo com o SI, existem sete unidades consideradas básicas e mais algumas derivadas (mostradas nas tabelas abaixo). Do ponto de vista da física teórica, esse sistema é desnecessariamente complicado. Kelvin, mole e candela derivam das outras quatro unidades, uma vez que temperatura é, na verdade, uma medida de energia. Já a candela é expressa em termos do fluxo de energia, de modo que, tanto a temperatura quanto a candela podem ser expressas em unidades de comprimento, massa e tempo. O mole é uma unidade que representa o número de partículas e não tem dimensão.

Assim, para reproduzir significativamente de forma experimental as dimensões de todas as quantidades físicas, é preciso somente três unidades básicas: comprimento, tempo e massa, as quais seriam necessárias e suficientes para expressar a dimensão de qualquer quantidade física e que correspondem aos conceitos básicos de espaço, tempo e matéria.

comprimento	metro	<i>m</i>
massa	quilograma	<i>kg</i>
tempo	segundo	<i>s</i>
corrente elétrica	ampere	<i>A</i>
temperatura termodinâmica	kelvin	<i>k</i>
intensidade da luz	candela	<i>cd</i>
montante de matéria	mole	<i>mol</i>

área	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3
frequência	hertz	$Hz = 1/s$
densidade	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
velocidade	metro por segundo	m/s
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2
força	newton	$N = kg.m/s^2$
pressão (tensão mecânica)	newton por metro quadrado	N/m^2
viscosidade cinemática	metro quadrado por segundo	m^2/s
viscosidade dinâmica	newton segundo por metro quadrado	$N.s/m^2$
trabalho, energia, calor	joule	$J = N.m$
potência	watt	$W = J/s$
carga	coulomb	$C = A.s$
potencial elétrico, força eletromotriz	volt	$V = W/A$
intensidade do campo elétrico	volt por metro	V/m
resistência	ohm	$\Omega = V/A$
capacitância	farad	$F = A.s/V$
fluxo magnético	weber	$Wb = V.s$
indutância	henry	$H = V.s/A$
indução	tesla	$T = Wb/m^2$
intensidade do campo magnético	ampere por metro	A/m
força magnetomotriz	ampere	A
fluxo luminoso	lumen	$lm = cd.sr$
luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2
iluminância	lux	$lx = lm/m^2$

Toda essa discussão tende a nos mostrar que todas as unidades podem ser expressas em termos das três unidades mecânicas. Segundo Johnstone-Stoney [32], essas três unidades básicas podem ser

definidas em termos de três constantes independentes. A proposta feita por ele, em 1874, usa três constantes: a constante de Newton, a velocidade da luz e as unidades básicas de eletricidade, ou seja, carga elétrica, para que se possa definir uma "série natural de unidades"

$$t_s = \sqrt{\frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^6}} \sim 4,59 \cdot 10^{-45} s, \quad (4.1)$$

$$l_s = \sqrt{\frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}} \sim 1,37 \cdot 10^{-36} m, \quad (4.2)$$

$$m_s = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G}} \sim 1,85 \cdot 10^{-9} kg, \quad (4.3)$$

em que o fator ϵ_0 foi incluído, uma vez que usamos a definição do SI de carga elétrica.

Plack propôs, de forma independente, uma abordagem similar para a definição das unidades com base em duas constantes a e b , inserindo a lei de Wien e G , o qual ele reformulou mais tarde em termos de c , G e \hbar como

$$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \sim 5,39056 \cdot 10^{-44} s, \quad (4.4)$$

$$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 1,61605 \cdot 10^{-35} m, \quad (4.5)$$

$$\sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \sim 2,17671 \cdot 10^{-8} kg. \quad (4.6)$$

Podemos ver que os dois sistemas estão claramente relacionados pela constante de estrutura fina, já que ela é $e^2/4\pi\epsilon_0 = \alpha\hbar c$.

Mas a questão de que precisamos realmente de três unidades naturais ainda é muito discutida. Existem autores que dizem que não, outros que dizem que apenas duas são suficientes e há quem concorde com três [28].

A medida de quaisquer duas quantidades de q_i é expressa da seguinte forma:

$$q_1 = \left(\frac{q_1}{u_q}\right) u_q \quad e \quad q_2 = \left(\frac{q_2}{u_q}\right) u_q \quad (4.7)$$

em que u_q é uma unidade de medida.

Devemos ter em mente que qualquer mudança, por menor que seja, nos valores das constantes, levará a um impacto na intensidade de vários fenômenos físicos, de forma que eles codificam algumas propriedades do nosso mundo.

4.2.1 Constantes na Cosmologia

Na cosmologia, há um interesse gradativo na variação destas constantes por alguns motivos, em particular:

- Muitas observações apontam para a existência de uma componente "suave" de energia escura no universo que poderia ser formada por um campo escalar dinâmico (quintessência);
- Os avanços nas medidas de possíveis variações nas constantes fundamentais abrem possibilidade para testar modelos teóricos com certa precisão em diversas épocas cosmológicas.

A variação cosmológica das constantes fundamentais induzidas por acoplamentos com a quintessência é um tema bastante relevante para que se possa verificar se o campo escalar poderia ser mesmo responsável por um efeito significativo.

A maior parte das restrições na variação temporal das constantes fundamentais não será local e nem relacionado com os sistemas físicos em várias épocas evolutivas do Universo, portanto, a comparação de diferentes restrições requer um modelo cosmológico completo.

É bom lembrar também que os testes com a constância das constantes é de extrema importância, pois acaba sendo um teste da física fundamental que podem revelar a necessidade ou não de novos graus de liberdade físicos na nossa teoria. Assim sendo, a constância das constantes fundamentais é um teste muito significativo da Relatividade Geral. Esses testes também tem uma relevância muito grande no domínio dos testes do Princípio da Equivalência (PE) (ver referência [33] para uma melhor compreensão desses testes com a RG e o PE). Daremos um resumo sobre o PE logo abaixo.

O Princípio da Equivalência

Medidas experimentais com alta precisão nos apontam que a massa gravitacional e a inercial são proporcionais. A validade desse resultado se estende para todas os lugares do Universo e para todos os instantes. Vale ressaltar que tal resultado está contido no *Princípio de Equivalência Fraco* (ou Princípio da Equivalência de Newton) que diz: *Dois corpos localizados no mesmo ponto de um campo*

gravitacional, caem exatamente com a mesma aceleração, independentemente de sua estrutura e composição internas [33].

Essa "coincidência" foi explicada com a Relatividade Geral de Einstein, pois tratava a gravidade não como um campo de força real, mas como um efeito do desvio do sistema de referência inercial. Por conseguinte, há o seguinte *Princípio de Equivalência Forte* (também chamado de Princípio da Equivalência de Einstein), o qual contém o princípio anterior: *Em um sistema localmente inercial (em queda livre), em toda a parte e em todo o instante, todas as leis (não gravitacionais) da física tomam a mesma forma da Relatividade Especial.*

Violação do Princípio de Equivalência

A massa de um corpo depende das constantes de acoplamento através das diversas energias de ligação eletromagnética, forte, fraca e gravitacional. A dependência de α , em particular, é feita através das correções radioativas para a massa dos núcleons [34]:

$$m_p = m + \alpha B_p \quad (4.8)$$

$$m_n = m + \alpha B_n \quad (4.9)$$

em que

$$m_{p,\alpha_0} \equiv \alpha_0 B_p \simeq 0,63 MeV \quad (4.10)$$

$$m_{n,\alpha_0} \equiv \alpha_0 B_n \simeq -0,13 MeV \quad (4.11)$$

em que $\alpha_0 = \alpha(t_0)$. Estamos supondo também que α varia com o tempo cósmico, que é o adequado para distâncias astronômicas. Este tipo de comportamento pode ser induzido por um escalar cosmológico, mas não necessariamente. Teremos, então, como consequência dessa variação, que um corpo em movimento em relação à referência móvel sentirá uma energia de ligação variável e, por conseguinte, uma massa dependente da posição. A conservação da energia requer a presença de acelerações anômalas, específicas da composição particular do corpo em termos dos núcleons, com a violação do princípio

da equivalência fraca. Assim, uma variação de α produz uma variação na massa. Consequentemente, podemos testar a consistência dos modelos com α variável usando os limites experimentais na violação do princípio da equivalência, o qual é expresso pelo parâmetro

$$\eta = \frac{2|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|} \quad (4.12)$$

em que a_1 e a_2 são as acelerações de dois corpos de teste diferentes. Esse parâmetro é chamado de *parâmetro de Eötvös*, e para calculá-lo a partir da variação de α , fazemos α em função de um campo escalar $\alpha(t) = \alpha(\phi(t))$. Segundo [35],

$$\eta < 10^{-13}. \quad (4.13)$$

4.3 A Constante de Estrutura Fina Alfa

O termo para a constante de estrutura fina foi introduzida pelo cientista Arnold Sommerfeld no início do século XX. Dessa maneira, ele determinou o tamanho das divisões ou da chamada "estrutura fina" das linhas espectrais do hidrogênio [36].

É interessante notar como Sommerfeld define a constante α em seu livro *Atomic Structure And Spectral Lines* em que diz que na teoria de estrutura fina existe uma confluência das três principais correntes da pesquisa moderna em física teórica da época, que eram: teoria dos elétrons, teoria do quanta e a teoria da relatividade, e determina a constante pela primeira vez como

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}, \quad (4.14)$$

em que e , h e c são os representantes da teoria dos elétrons, teoria quântica e da teoria da relatividade, respectivamente [36].

Essa constante foi introduzida para explicar a divisão relativística das linhas espectrais atômicas, porém o seu verdadeiro significado ficou obscuro por algum tempo. Wolfgang Pauli chegou a dizer: *Quando eu morrer, minha primeira pergunta para o diabo será: Qual o significado da constante de estrutura fina?* [37]. Ainda segundo [37], alfa é a razão entre as forças de interação eletromagnética e gravitacional em unidades fundamentais.

Com o desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED), a importância de α cresceu bastante: de fenômeno espectroscópico para uma constante de acoplamento geral para o campo eletromagnético, determinando a força de interação entre fótons e elétrons.

A constante de estrutura fina é definida atualmente como

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \quad (4.15)$$

em que e é a unidade de carga eletromagnética, ϵ_0 é a constante de permissividade elétrica no vácuo, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e c é a velocidade da luz. O seu valor hoje é de

$$\alpha = 7,297.10^{-3}$$

ou, aproximadamente, $1/137$.

A medição da variação de constantes é um dos problemas mais difíceis de resolver, pois exige equipamentos com altíssima precisão, capazes de permanecer estáveis até conseguirem registrar qualquer tipo de mudança, o que pode levar muito tempo. Todavia, felizmente, temos outras formas de fazer essas medidas. Vamos dar alguns exemplos (veja também figura 4.1):

i) Reator nuclear natural de Oklo, Gabão - Na década de 1970, cientistas descobriram que o urânio presente na mina parecia lixo atômico nuclear, ou seja, parecia já ter estado em um reator nuclear moderno. Logo descobriu-se que Oklo foi um reator nuclear natural cerca de 2 bilhões de anos atrás. Isso nos leva a crer que a variação do valor da constante α ao longo do tempo é inferior a [38]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-8} \quad z = 0,14; \quad (4.16)$$

ii) Meteoritos - Através da análise do ^{187}Re presente em meteoritos com cerca de 4,6 bilhões de anos (tempo da formação do sistema solar) [39]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-7} \quad z = 0,5 - 3,5; \quad (4.17)$$

iii) Quasares - Por meio do estudo das linhas do espectro de absorção de quasares distantes [40],

[41], [42]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-5} \quad z = 0,7 - 1,5; \quad (4.18)$$

iv) Radiação cósmica de fundo - Análise do espectro de potência de anisotropias na CMB [43]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-2} \quad z = 10^3; \quad (4.19)$$

v) Nucleossíntese do Big Bang - Estudando o valor da constante alfa durante a nucleossíntese primordial [44], [45]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-2} \quad z = 10^{10} - 10^8; \quad (4.20)$$

vi) Ondas gravitacionais - Investigando o atraso temporal entre as imagens formadas através do lenteamento forte das ondas gravitacionais [46]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-5} \quad z > 1,6; \quad (4.21)$$

vii) Espectro de anã-branca - Analisando a dependência da constante alfa em um potencial gravitacional de uma anã-branca [47]

$$\left| \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-5} \quad z = 10^{-5}; \quad (4.22)$$

viii) Disprósio atômico - Mediante a exploração dos estados excitados quase degenerados, uma vez que os cálculos teóricos dizem que tais estados são bastante sensíveis à variação de alfa [48]

$$\left| \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right| \lesssim 10^{-17} \text{ ano}^{-1} \quad z = 0. \quad (4.23)$$

A variação temporal da constante de estrutura fina, α , é a mais simples de se estudar, dentre todas as possibilidades, tanto teórica como experimentalmente.

4.3.1 Limites Atuais Sobre Alfa

Com os dados que temos hoje, podemos reunir os limites sobre alfa em Figura 4.2.

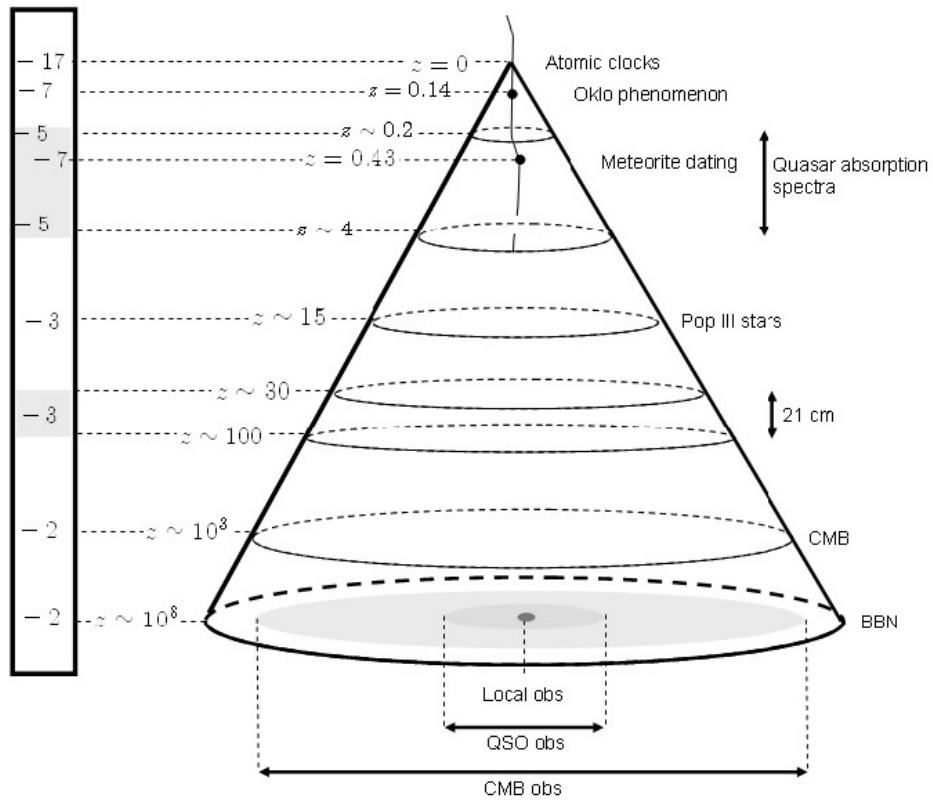


Figura 4.1: A figura ilustra um pequeno resumo dos sistemas que são usados para explorar a constância das constantes fundamentais, bem como sua posição no diagrama do espaço-tempo, em que o cone representa o nosso cone de luz passado. As áreas acizadas representam o espaço comóvel examinado por diferentes testes. Tirado de [29]

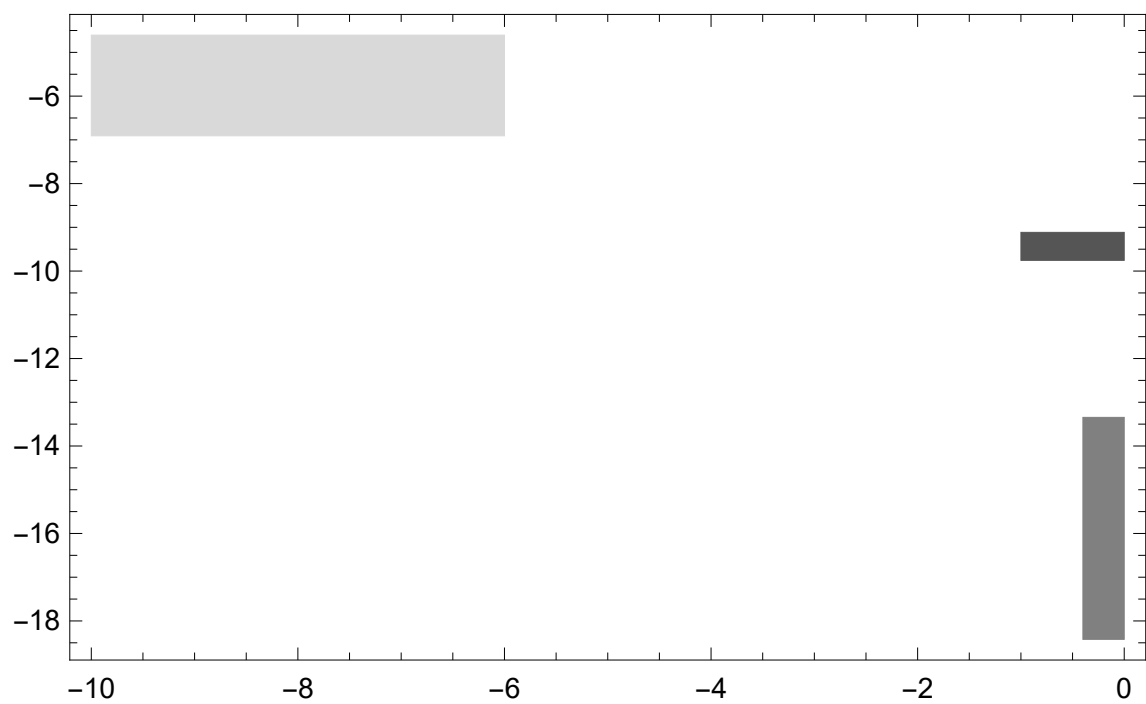


Figura 4.2: A figura ilustra algumas das restrições experimentais apresentadas acima. A parte em cinza claro representa as restrições dadas pela BBN e pela CMB; a parte em cinza são as restrições dadas pelo reator Oklo e pelos meteoritos; e a parte em cinza escura são as restrições dadas pelos espectros de quasares, anãs brancas e ondas gravitacionais.

Capítulo 5

Acoplamento de ϕ Com o Campo Eletromagnético

5.1 Introdução

As observações nos levam a acreditar que o universo é dominado por alguma componente de energia, cujo o comportamento gravitacional é extremamente semelhante ao da constante cosmológica. Mesmo sendo consistente com os dados existentes, também temos inúmeros problemas que podem ser amplamente evitados se o termo constante Λ for substituído por um campo escalar ϕ , o qual evolui dinamicamente com um potencial dado $V(\phi)$. Neste caso, se falará muito em *energia escura*.

Já temos conhecimento que um acoplamento com o setor eletromagnético leva a variações temporais da constante de estrutura fina α [22], e que esta variação implica na existência de campos sem ou quase sem massa acoplados a campos de calibre. Dessa forma, a quintessência ou outra espécie de campo escalar pode ser responsável por essa variação temporal de α por meio da interação entre o campo ϕ e um campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Sabemos também que essa variação é a mais simples de se estudar tanto teórica como experimentalmente dentre todas as possibilidades.

O primeiro a considerar a introdução de um acoplamento linear entre um campo escalar e o campo eletromagnético foi Beckenstein [49] em meados dos anos 1980, começando o estudo teórico da variação temporal de α . Esse modelo afeta a permeabilidade eletromagnética, que é o que identificamos como a "variação de α ".

A densidade de lagrangiana que descreve o acoplamento entre os campos eletromagnético e ϕ é

$$\mathcal{L}_F(\phi) = -\frac{1}{4}B_F(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

em que $B_F(\phi)$ é uma função cinética de calibre adimensional, cuja a forma mais geral com uma combinação de vários comportamentos possíveis é representada por [50]

$$B_F(\phi) = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^\varepsilon [1 - \zeta(\phi - \phi_0)^q] e^{\tau(\phi - \phi_0)}$$

sendo ε, ζ, τ e q o conjunto de parâmetros que caracterizam esses diversos comportamentos.

Isto posto, definimos uma constante de estrutura fina efetiva dependente do tempo (veja [50])

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{B_F(\phi(t))} \quad (5.2)$$

em que α_0 é o valor da constante de estrutura fina medida hoje. A partir de 5.2, podemos obter a seguinte relação:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \equiv \frac{\alpha(t) - \alpha_0}{\alpha_0} = \frac{1 - B_F(\phi(t))}{B_F(\phi(t))}. \quad (5.3)$$

Se fizermos $B_F(\phi_0) = 1$, no tempo atual, encontramos $\Delta\alpha = 0$.

5.2 Representação de alfa

5.2.1 Tipos de Acoplamento

Acoplamento Linear

Para o nosso primeiro caso, que é o mais simples, fazemos $\varepsilon = \tau = 0$ e $q = 1$. Assim, a nossa função fica

$$B_F(\phi) = 1 - \zeta(\phi - \phi_0) \quad (5.4)$$

chamado de acoplamento linear. Este é o caso que corresponde à proposta original de Bekenstein [49]. Apesar de ter sido o primeiro a propor esse tipo de acoplamento, Bekenstein não forneceu um

potencial para o campo escalar. Para o nosso caso, fazemos essa análise para um sistema com radiação e para um sistema sem radiação. Além disso, usamos dois valores diferentes do parâmetro ζ .

• **Caso sem radiação**

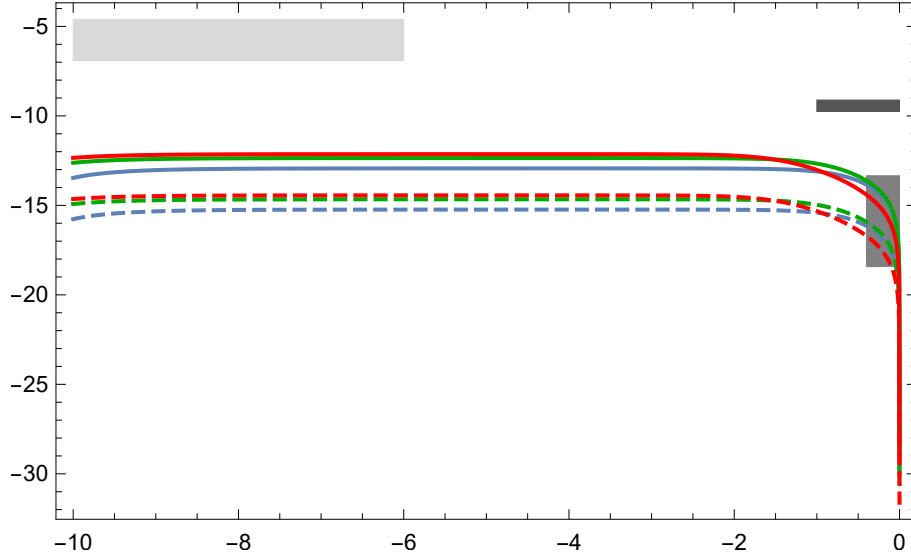


Figura 5.1: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento linear sem radiação. A linha azul representa as condições iniciais $\lambda = 1$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 6 \cdot 10^{-7}$; a linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9 \cdot 10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\zeta \simeq 10^{-5}$ e tracejada indica $\zeta \simeq 10^{-6}$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

Na figura 5.1, temos $\Delta\alpha$ assim como foi definido em 5.3. Podemos ver que o valor de $\Delta\alpha$ que melhor se encaixa nos em todas as restrições experimentais é a curva vermelha tracejada, que corresponde ao terceiro caso das condições iniciais e com $\zeta \simeq 10^{-6}$. Também podemos ver que, no geral, esse valor de ζ responde mais satisfatoriamente às todas as restrições impostas nas análises feitas. Valores maiores que $\zeta \simeq 10^{-6}$ são descartados com base nos dados observacionais.

• **Caso com radiação**

Em 5.2 e nos demais acoplamentos com radiação, não colocamos o primeiro caso que seria linha azul, pois os resultados que obtivemos não foram satisfatórios e não acrescentariam muito em nossas análises. Nesta figura, vemos que as restrições impostas pelo reator Oklo e por meteoritos não foram respeitadas como no caso sem radiação. Assim, podemos dizer que os valores dos parâmetros que foram usados em ambas as análises do acoplamento linear não satisfazem as restrições da mesma forma, a presença da radiação muda bastante o comportamento da constante de estrutura fina ao longo do tempo.

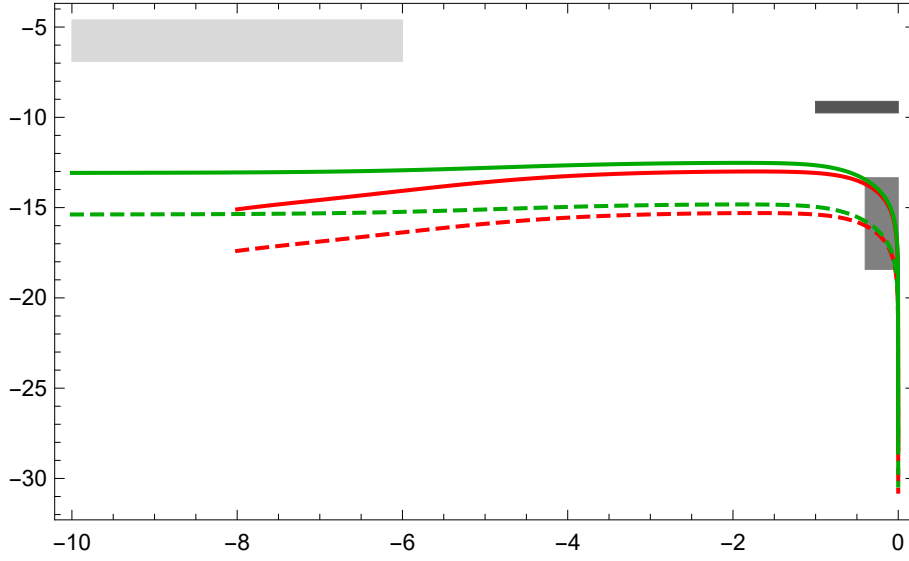


Figura 5.2: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento linear com radiação. A linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9 \cdot 10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\zeta \simeq 10^{-5}$ e tracejada indica $\zeta \simeq 10^{-6}$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

Acoplamento Polinomial

Para o nosso segundo caso, temos:

$$B_F(\phi) = 1 - \zeta(\phi - \phi_0)^q \quad (5.5)$$

em que fazemos $\varepsilon = \tau = 0$ novamente, mas com $q = 2$ que é chamado de acoplamento quadrático. Este caso foi considerado em [51], no entanto, com uma hipótese adicional de proporcionalidade entre $B_F(\phi)$ e $V(\phi)$.

• Caso sem radiação

Nesse caso 5.3 e 5.4, temos que os dados não impõem limites superiores para o parâmetro q e usamos somente um valor para este parâmetro, enquanto usamos dois valores para o parâmetro ζ . Aqui vemos que, as restrições são melhores satisfeitas para $\zeta \simeq 10^{-6}$ em todos os casos e para $\zeta \simeq 10^{-5}$ para o caso da linha vermelha. Note que a linha verde tracejada não aparece, uma vez que coincide com a linha vermelha contínua.

• Caso com radiação

Na imagem 5.4, vemos que o comportamento de α é muito parecido com o caso sem radiação, porém com uma pequena piora, haja visto que as curvas passam mais perto das restrições impostas.

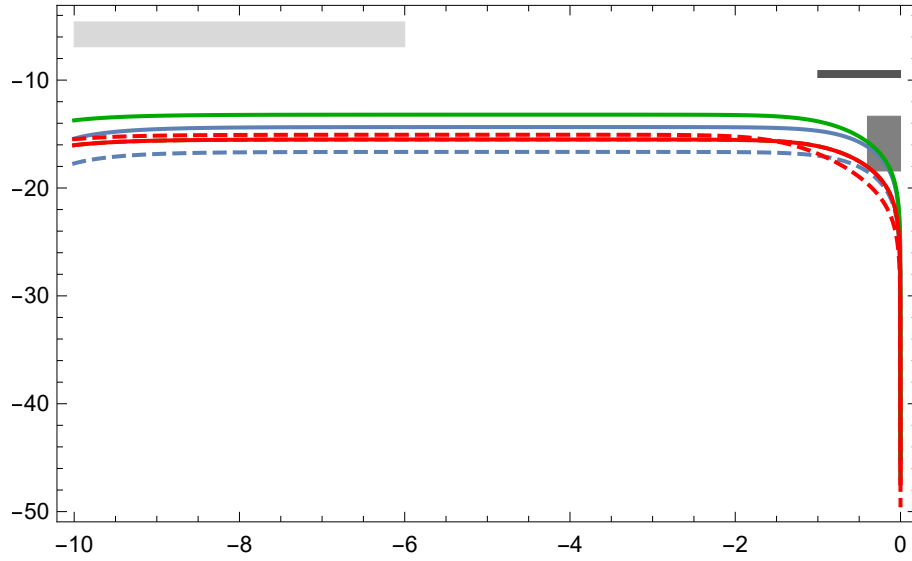


Figura 5.3: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento do tipo polinomial sem radiação. A linha azul representa as condições iniciais $\lambda = 1$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 6 \cdot 10^{-7}$; a linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9 \cdot 10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\zeta \simeq 10^{-5}$ e a tracejada indica $\zeta \simeq 10^{-6}$. Para todos os casos temos $q = 2$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

Como já foi dito anteriormente, o primeiro caso com a linha azul foi retirado.

Acoplamento da Lei de Potência

Para o nosso terceiro caso, temos:

$$B_F(\phi) = \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^\epsilon \quad (5.6)$$

em que escolhemos $\zeta = \tau = 0$. Para que os dados sejam satisfeitos, é necessário um ajuste fino no parâmetro ϵ , devido à pequenez de ϕ no Universo primordial. Os limites experimentais são respeitados para $\epsilon \leq 4 \cdot 10^{-7}$ [50].

• Caso sem radiação

Na figura 5.5, temos que com o valor de ϵ que trabalhamos, não conseguimos encontrar uma curva que respeitasse todos os limites experimentais. A curva que melhor se encaixa é a representada pela linha vermelha contínua que indica um valor $\epsilon = 4 \cdot 10^{-7}$. Este tipo de acoplamento precisa de um ajuste fino, pois como pudemos ver em nosso gráfico, quanto maior o valor de ϵ , menos os dados são satisfeitos.

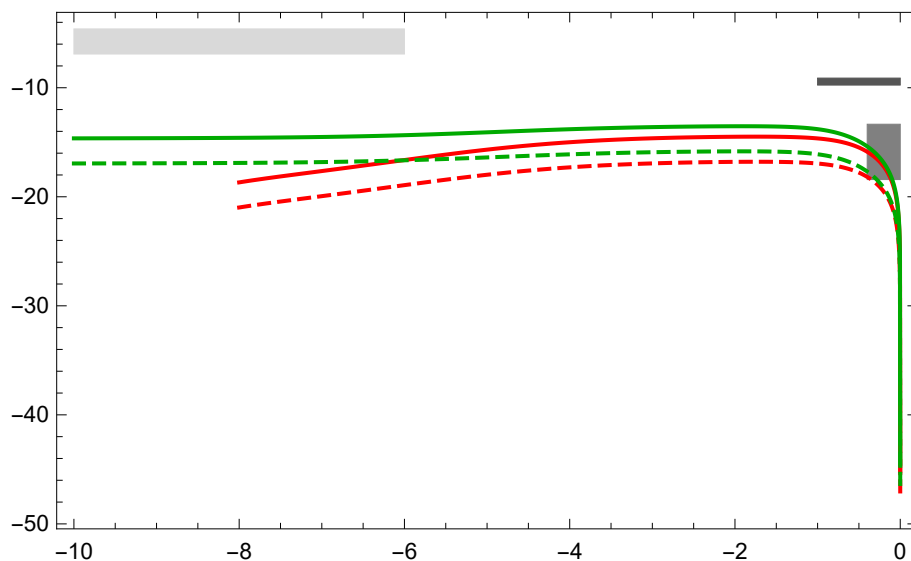


Figura 5.4: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento do tipo polinomial com radiação. A linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9 \cdot 10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\zeta \simeq 10^{-5}$ e a tracejada indica $\zeta \simeq 10^{-6}$. Para todos os casos temos $q = 2$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

• Caso com radiação

Em 5.6, vemos que a presença da radiação piora os resultados com os valores de ε usados, ou seja, seu ajuste deve ser cada vez mais fino. A curva que melhor se adequa é a verde sólida para $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-7}$.

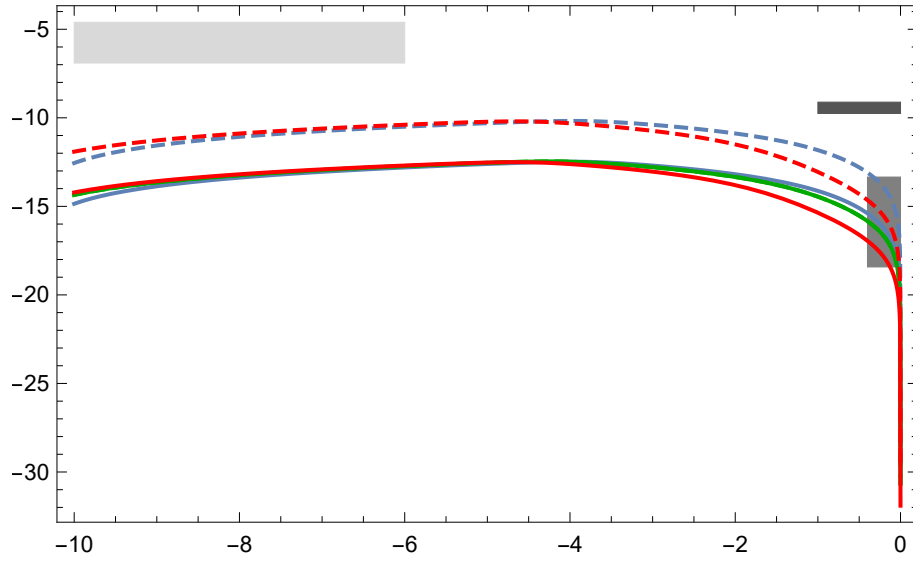


Figura 5.5: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento do tipo lei de potência sem radiação. A linha azul representa as condições iniciais $\lambda = 1$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 6.10^{-7}$; a linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9.10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2.10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\epsilon = 4.10^{-7}$ e a tracejada indica $\epsilon = 4.10^{-6}$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

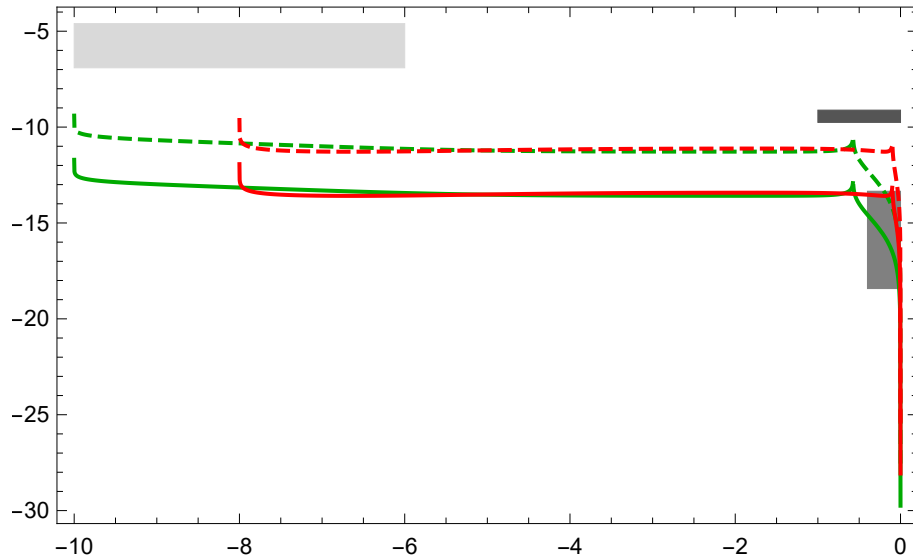


Figura 5.6: A figura ilustra o comportamento do logaritmo de $\Delta\alpha/\alpha$ para um acoplamento do tipo lei de potência com radiação. A linha verde representa $\lambda = 1,8$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 9.10^{-7}$; a linha vermelha indica $\lambda = 2,4$, $x_1 = 0,1$ e $x_2 = 2.10^{-6}$. A linha contínua representa o parâmetro $\epsilon = 4.10^{-7}$ e a tracejada indica $\epsilon = 4.10^{-6}$. O eixo x do gráfico representa $-\ln(1+z)$, assim como em todos os gráficos obtidos.

Capítulo 6

Conclusão

Após todas as discussões e análises feitas neste trabalho, podemos concluir que a constante de estrutura fina, α , é uma "constante" considerada fundamental na física, mas que ela poderia não apresentar uma constância no decorrer do tempo. Dessa forma, conseguimos fazer testes com essa "não constância" para estudar seu desenvolvimento ao longo do tempo cósmico. Para isto, usamos um modelo cosmológico de quintessência, o qual permite que a componente escura do Universo que é responsável pela aceleração tardia se comporte de forma dinâmica ao longo do tempo, permitindo uma solução diferente da constante cosmológica, Λ .

Através de um estudo de um sistema dinâmico, primeiramente com apenas duas variáveis, x_1 e x_2 , e depois com a presença da radiação, x_3 , fomos capazes de observar a evolução cosmológica desses aspectos e qual seu comportamento ao longo do tempo. Dessa maneira, pudemos também saber quais eram as melhores condições iniciais para usá-las nos testes da constância da constante de estrutura fina.

Com esses dados em mãos, conseguimos fazer muitas análises de α com alguns tipos de acoplamento e parâmetros diferentes que influenciavam no seu comportamento durante o tempo. Foi possível tirar certas conclusões a partir dessas análises, entre elas: devido aos vínculos observacionais, a variação temporal de α é extremamente pequena, mas que acaba tendo um impacto significativo por conta dos 14 bilhões de anos de história do Universo. Um outro resultado interessante que obtivemos com os dados que foram utilizados é que somente um pequeno grupo de restrições experimentais que usamos em α se sobrepuseram sobre seus valores no decorrer do tempo e somente em algumas análises. Tais restrições vieram do reator nuclear natural Oklo e de meteoritos. As outras que foram empregadas nas nossas análises são viáveis fenomenologicamente, já que elas não se superpuseram sobre as curvas de

α .

Percebemos também que os parâmetros que foram testados, ζ e ϵ são bem pequenos, porém acabam influenciando bastante a evolução de α no decorrer do tempo. Alguns valores se ajustam melhor que outros aos dados experimentais. Isso acaba levando a um ajuste fino desses parâmetros, em que são necessários inúmeros testes para que tenhamos o valor mais preciso possível deles a fim de que eles satisfaçam o maior número possível de restrições experimentais existentes. Nesse sentido uma análise estatística desses modelos seria interessante.

As perspectivas futuras são que possamos avançar mais na tecnologia com o objetivo de que tenhamos restrições experimentais cada vez mais precisas, para que tenhamos também um valor mais preciso ainda da constante de estrutura fina. Por exemplo, o ESPRESSO é um espectrógrafo de alta resolução utilizado no telescópio VLT [52]. Com isso, poderemos ser mais e mais precisos na construção de α e compreender ainda mais a evolução do Universo.

Referências Bibliográficas

- [1] M.B Ribeiro. Cosmologia Newtoniana. *Boletim da Soc. Astronômica Brasileira*, 14:34–63, 1994.
- [2] F. Zwicky. Republication of: The redshift of extragalactic nebulae. *General Relativity and Gravitation*, 41:207–224, January 2009.
- [3] V. C. Rubin. Velocities and mass distribution in the barred spiral NGC 5728. *APJ*, 238:808–817, June 1980.
- [4] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,139(1987)].
- [5] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, 108B:389–393, 1982. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,149(1987)].
- [6] B. Ryden. *Introduction to cosmology*.
- [7] Derek Raine and Ted Thomas. An introduction to the science of cosmology. 01 2001.
- [8] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *APJ*, 142:419–421, July 1965.
- [9] G. Gamow. The origin of elements and the separation of galaxies. *Phys. Rev.*, 74:505–506, Aug 1948.
- [10] Juan Garcia-Bellido. Cosmology and astrophysics. In *2004 European School of High-Energy Physics, Sant Feliu de Guixols, Spain, 30 May - 12 June 2004*, pages 267–342, 2005.

- [11] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354:769–822, 1916.
- [12] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, March 1929.
- [13] H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens, and W. Zimdahl. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J.*, C74(11):3160, 2014.
- [14] R. J. Adler, B. Casey, and O. C. Jacob. Vacuum catastrophe: An Elementary exposition of the cosmological constant problem. *Am. J. Phys.*, 63:620–626, 1995.
- [15] C. Wetterich. Cosmologies With Variable Newton’s ‘Constant’. *Nucl. Phys.*, B302:645–667, 1988.
- [16] R. R. Caldwell, Rahul Dave, and Paul J. Steinhardt. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582–1585, 1998.
- [17] Shinji Tsujikawa. Quintessence: A Review. *Class. Quant. Grav.*, 30:214003, 2013.
- [18] Paul J. Steinhardt, Li-Min Wang, and Iyaylo Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Phys. Rev.*, D59:123504, 1999.
- [19] Sean M. Carroll. The Cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1, 2001.
- [20] R. D. Peccei. Light scalars in cosmology. In *Sources and detection of dark matter and dark energy in the universe. Proceedings, 4th International Symposium, DM 2000, Marina del Rey, USA, February 23-25, 2000*, pages 98–104, 2000.
- [21] Joshua A. Frieman, Christopher T. Hill, Albert Stebbins, and Ioav Waga. Cosmology with ultra-light pseudo nambu-goldstone bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2077–2080, Sep 1995.
- [22] C. J. A. P. Martins. The status of varying constants: a review of the physics, searches and implications. 2017.
- [23] Valeria Pettorino, Luca Amendola, and Christof Wetterich. How early is early dark energy? *Phys. Rev.*, D87:083009, 2013.

- [24] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy*. Cambridge University Press, 2015.
- [25] Christian G. Boehmer and Nyein Chan. Dynamical systems in cosmology. In *LTCC Advanced Mathematics Series: Volume 5 Dynamical and Complex Systems*, pp. 121-156 (2017), 2014.
- [26] Carlos J. A. P. Martins. Cosmology with varying constants. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A360:2681–2696, 2002. [,41(2002)].
- [27] Paul A. M. Dirac. The Cosmological constants. *Nature*, 139:323, 1937.
- [28] Michael J. Duff, Lev B. Okun, and Gabriele Veneziano. Trialogue on the number of fundamental constants. *Journal of High Energy Physics*, 2002(03):023, 2002.
- [29] Jean-Philippe Uzan. Varying constants, gravitation and cosmology. *Living Reviews in Relativity*, 14(1):2, Mar 2011.
- [30] S. A. Levshakov, P. Molaro, and D. Reimers. Searching for spatial variations of α^2/μ in the Milky Way. *Astron. Astrophys.*, 516:A113, 2010.
- [31] A. Thompson and B.N. Taylor. *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*. PHYSICAL MEASUREMENT LABORATORY, 2008.
- [32] J. D. Barrow. Natural Units Before Planck. *QJRAS*, 24:24, March 1983.
- [33] Clifford M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2018.
- [34] J. Gasser and H. Leutwyler. Quark masses. *Physics Reports*, 87(3):77 – 169, 1982.
- [35] S. Baeßler, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt, and H. E. Swanson. Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3585–3588, Nov 1999.
- [36] A. Sommerfeld and H.L. Brose. *Atomic Structure and Spectral Lines*. Number v. 1. Methuen & Company, 1934.
- [37] R. L. Oldershaw. The Meaning Of The Fine Structure Constant. *ArXiv e-prints*, August 2007.

- [38] M. S. Onegin. Investigation of the fundamental constants stability based on the reactor Oklo burn-up analysis. 2014.
- [39] Keith A. Olive, Maxim Pospelov, Yong-Zhong Qian, Gerard Manhes, Elisabeth Vangioni-Flam, Alain Coc, and Michel Casse. A Re-examination of the Re-187 bound on the variation of fundamental couplings. *Phys. Rev.*, D69:027701, 2004.
- [40] A. Songaila and L. L. Cowie. Constraining the Variation of the Fine Structure Constant with Observations of Narrow Quasar Absorption Lines. *Astrophys. J.*, 793:103, 2014.
- [41] Michael T. Murphy, J. K. Webb, and V. V. Flambaum. Further evidence for a variable fine-structure constant from Keck/HIRES QSO absorption spectra. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 345:609, 2003.
- [42] Michael T. Murphy, John K. Webb, and Victor V. Flambaum. Revision of VLT/UVES constraints on a varying fine-structure constant. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 384:1053–1062, 2008.
- [43] Kazuhide Ichikawa, Toru Kanzaki, and Masahiro Kawasaki. CMB constraints on the simultaneous variation of the fine structure constant and electron mass. *Phys. Rev.*, D74:023515, 2006.
- [44] P. P. Avelino, S. Esposito, G. Mangano, C. J. A. P. Martins, A. Melchiorri, G. Miele, O. Pisanti, G. Rocha, and Pedro T. P. Viana. Early universe constraints on a time varying fine structure constant. *Phys. Rev.*, D64:103505, 2001.
- [45] Kenneth M. Nollett and Robert E. Lopez. Primordial nucleosynthesis with a varying fine structure constant: An Improved estimate. *Phys. Rev.*, D66:063507, 2002.
- [46] Xin Li, Li Tang, Hai-Nan Lin, and Li-Li Wang. Testing the variation of the fine structure constant with strongly lensed gravitational waves. *Chin. Phys.*, C42(9):095104, 2018.
- [47] J. C. Berengut, V. V. Flambaum, A. Ong, J. K. Webb, John D. Barrow, M. A. Barstow, S. P. Preval, and J. B. Holberg. Limits on the dependence of the fine-structure constant on gravitational potential from white-dwarf spectra. *Phys. Rev. Lett.*, 111(1):010801, 2013.
- [48] N. Leefer, C. T. M. Weber, A. Cingöz, J. R. Torgerson, and D. Budker. New limits on variation of the fine-structure constant using atomic dysprosium. *Phys. Rev. Lett.*, 111:060801, Aug 2013.

- [49] Jacob D. Bekenstein. Fine-structure constant: Is it really a constant? *Phys. Rev. D*, 25:1527–1539, Mar 1982.
- [50] Valerio Marra and Francesca Rosati. Cosmological evolution of alpha driven by a general coupling with quintessence. *JCAP*, 0505:011, 2005.
- [51] Seokcheon Lee, Keith A. Olive, and Maxim Pospelov. Quintessence models and the cosmological evolution of alpha. *Phys. Rev.*, D70:083503, 2004.
- [52] A. C. O. Leite, C. J. A. P. Martins, P. Molaro, D. Corre, and S. Cristiani. Dark energy constraints from ESPRESSO tests of the stability of fundamental couplings. *Phys. Rev.*, D94(12):123512, 2016.